Chapter 3

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est une autre généralisation de l'opérateur de dérivation classique à des ordres non entiers. Cette dérivée possède également des propriétés intéressantes, telles que la linéarité, la règle de Leibniz et le théorème fondamental du calcul. Elle peut être aussi utilisée pour résoudre des équations différentielles fractionnaires avec des conditions initiales ou des conditions aux limites non locales.

En comparaison avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo est souvent préférée car elle est mieux adaptée à la modélisation de phénomènes physiques réels, et elle permet d'obtenir des solutions plus régulières. Cependant, la dérivée fractionnaire de Caputo est plus difficile à calculer en pratique que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 8. Soit $n \geq 0$, et $m = \lceil n \rceil$, alors on définit l'opérateur $\hat{D}_a^n$ par

$$\hat{D}_a^n f = J_a^{m-n} D^m f, \;\; D^m f \in L^1[a,b]$$

Commençons par le cas classique pour $n \in \mathbb{N}$,dans ce cas $m = n$ et la définition implique que $\hat{D}_a^n f = J_a^0 D^n f = D^n f$, i.e., pour $n \in \mathbb{N}$ la définition de $\hat{D}_a^n$ coïncide avec le cas classique. Analysons ce opérateur dans le cas fractionnaire $n \notin \mathbb{N}$ avec un exemple simple.

Examples 19. Soit $f(x) = (x-a)^\beta$, $\beta \geq 0$, alors

$$\hat{D}_a^n (x-a)^\beta = J_a^{m-n} D^m (x-a)^\beta, \ n > 0.$$

$$D^m (x-a)^\beta = \begin{cases} 0, & \beta < m, \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}(x-a)^{\beta-m}, & sinon. \end{cases}$$

Alors

$$\hat{D}_a^n (x-a)^\beta = \begin{cases} 0, & \beta \in \{0, 1, ..., m-1\}, \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(x-a)^{\beta-n}, & sinon. \end{cases}$$

Application. $f(x) = x^2$, $n = \frac{1}{2}$, $m = 1$ et $a = 0$

$$\hat{D}^{\frac{1}{2}} x^2 = \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}}.$$

Théorème 20. Soit $n > 0$, et $m = \lceil n \rceil$, supposons que $f \in A^m[a,b]$ alors

$$\hat{D}_a^n = D_a^n (f - T_{m-1}[f : a]), \ p.p$$

$T_{m-1}[f : a]$ est le developpement de Taylor de degrée $m-1$ de la fonction f centrée en a.

Preuve

On a par définition:

$$\begin{aligned} D_a^n \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(t-a)^k \right) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^m J_a^{m-n} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(t-a)^k \right) \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-n-1}}{\Gamma(m-n)} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(\tau-a)^k \right) d\tau. \end{aligned}$$

Utilisons intégration par parties, et notons $g(\tau) = f(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(\tau - a)^k$ on obtient

$$\begin{aligned}
J_a^{m-n}(g(t)) &= \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-n-1}}{\Gamma(m-n)} \left(f(\tau) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(\tau - a)^k \right) d\tau \\
&= \left[\frac{(t-\tau)^{m-n}}{\Gamma(m-n+1)} g(\tau) \right]_a^t + \int_a^t \frac{(t-\tau)^{m-n}}{\Gamma(m-n+1)} \frac{d}{d\tau} g(\tau) d\tau \\
&= J_a^{m-n+1} \frac{d}{dt} g(t).
\end{aligned}$$

De même façon pour m fois:

$$\begin{aligned}
J_a^{m-n}(g(t)) &= J_a^{m-n+m} \frac{d^m}{dt^m} g(t) \\
&= J_a^m J_a^{m-n} \frac{d^m}{dt^m} g(t) \\
&= J_a^m J_a^{m-n} \frac{d^m}{dt^m} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(t - a)^k \right) \\
&= J_a^m J_a^{m-n} \frac{d^m}{dt^m} f(t), \ car \ \frac{d^m}{dt^m} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(t - a)^k \right) = 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
D_a^n(f(t) - T_{m-1}[f:a](t)) &= \frac{d^m}{dt^m} J_a^{m-n}(f(t) - T_{m-1}[f:a](t)) \\
&= \frac{d^m}{dt^m} J_a^{m-n} g(t) \\
&= \frac{d^m}{dt^m} J_a^m J_a^{m-n} \frac{d^m}{dt^m} f(t) \\
&= J_a^{m-n} \frac{d^m}{dt^m} f(t) \\
&= D_{*a}^n f(t).
\end{aligned}$$

Définition 9. Soit $n > 0$, et $m = \lceil n \rceil$, f une fonction telque $D_a^n(f - T_{m-1}[f:a])$ exists, alors on définie

$$D_{*a}^n f := D_a^n(f - T_{m-1}[f:a])$$

l'opérateur D_{*a}^n est appelé l'opérateur différentielle fractionnaire d'ordre n de Caputo.

Lemme 21. Soit $n > 0$, et $m = \lceil n \rceil$, supposons que $f \in C^m[a,b]$ et $x \in [a,b]$ alors

$$D^n_{*a} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_a^x (x-t)^{-n-1}(f(t) - T_{m-1}[f:a](t))dt.$$

Lemme 22. Soit $n > 0$, et $m = \lceil n \rceil$, supposons que f est définie telque $D^n_{a,*}f$ et $D^n_a f$ exists, alors

$$D^n_{*a} f(x) = D^n_a f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-n+1)}(x-a)^{k-n}.$$

Preuve

Soit $n > 0$, $m = \lceil n \rceil$, par la définition de Caputo:

$$\begin{aligned} D^n_{*a} f(x) &= D^n_a f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} D^n_a[(.-a)^k](x) \\ &= D^n_a f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{\Gamma(k-n+1)}(x-a)^{k-n}. \end{aligned}$$

Examples 23. Soit $f(x) = e^{\lambda x},\ \lambda > 0$ et $a = 0$

$$\begin{aligned} D^n_{*0} e^{\lambda x} &= D^n_0 e^{\lambda x} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k e^{\lambda x}|_{x=0}}{\Gamma(k-n+1)}(x-0)^{k-n} \\ &= D^n_0 e^{\lambda x} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)}, \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} D^n_{*0} e^{\lambda x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+m} x^{k+m-n}}{\Gamma(k+m-n+1)} \\ &= \lambda^m x^{m-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{\Gamma(k+m-n+1)} \\ &= \lambda^m x^{m-n} E_{1,m-n+1}(\lambda x). \end{aligned}$$

Lemme 24. Sous les hypothéses du lemme précédent, on a

$$D_{*a}^{n}f = D_{a}^{n}f$$

si et seulement si $D^k f(a) = 0$, $\forall k = \overline{0, m-1}$.

Examples 25. $f(x) = x^5$, $a = 0$, $n = \frac{5}{2}$ donc $m = 3$

$$D_a^n f(x) = D_0^{\frac{5}{2}} x^5 = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\frac{5}{2})} x^{5-\frac{5}{2}},$$

$$D_{*a}^n f(x) = D_{*a}^{\frac{5}{2}} x^5 = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\frac{5}{2})} x^{5-\frac{5}{2}}.$$

Théorème 26. Si $f$est continue et $n \geq 0$ alors

$$D_{*a}^n J_a^n f = f.$$

Preuve

Soit $\phi = J_a^n f$, on a $D^k\phi(a) = 0$, $k = 0, ..., m-1$. Alors

$$D_{*a}^n J_a^n f = D_{*a}^n \phi = D_a^n \phi = D_a^n J_a^n f = f.$$

Encore, on trouve que la dérivée de Caputo n'est pas l'inverse à droite de R-L intégrale.

Théorème 27. Soit $n > 0$, avec $m = \lceil n \rceil$, et $f \in A^m[a, b]$ alors

$$J_a^n D_{*a}^n f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Preuve

On a

$$D_{*a}^n f = \hat{D}_a^n f = J_a^{m-n} D^m f.$$

Appliquons J_a^n et utilisons la propriété de semi groupe de l'intégrale de R-L, on obtient d'une part

$$J_a^n D_{*a}^n f = J_a^n J_a^{m-n} D^m f = J_a^m D^m f. \tag{3.1}$$

Et d'autre part, le developpement de Taylor classique nous donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^k + J^m D^m f(x). \tag{3.2}$$

Alors de (3.1) et (3.2), on obtient le résultat.

Corollaire 28. (Taylor expansion pour la dérivée de Caputo)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^k + J^m D^m f(x).$$

Lemme 29. Soit $n > 0$, avec $m = \lceil n \rceil$, et $f \in C^m[a,b]$ alors $D_{*a}^n f \in C[a,b]$ et $D_{*a}^n f(a) = 0$.

Examples 30. $f(x) = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $m = 1$

$$D_{*a}^n x^0 = J_0^{1-\frac{1}{2}} D^1 x^0 = J_0^{\frac{1}{2}} 0 = 0.$$

Lemme 31. Soit $f \in C^k[a,b]$ pour quelque $a < b$ et $k \in \mathbb{N}$, de plus soit $n, \epsilon > 0$ telque $\exists l \in \mathbb{N}$ avec $l \leq k$ et $n, n+\epsilon \in [l-1, l]$ alors:

$$D_{*a}^{\epsilon} D_{*a}^n f = D_{*a}^{n+\epsilon} f.$$

Remarque 6. 1. Ce résultat ne peut pas être vérifier en général si la dérivée de Caputo à été remplacé par R-L.

Examples 32. $f(x) = 1$, $n = 1$ et $\epsilon = \frac{1}{2}$, $a = 0$

$$D_0^{\frac{1}{2}} D_0^1 1 = D_0^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)} x^{-1} = D_0^{\frac{1}{2}} 0 = 0,$$

$$D_0^{\frac{1}{2}+1} 1 = D_0^{\frac{3}{2}} x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\frac{1}{3})} x^{-\frac{3}{2}}.$$

2. La condition d'existence de l avec les propriétés mentionner dans ce lemme sont necessaire

Examples 33. $f(x) = x$, $n = \epsilon = \frac{7}{10}$ et $n < 1 < n + \epsilon = \frac{7}{5}$, $a = 0$

$$D_{*a}^{\frac{7}{10}} f(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{13}{10})} x^{\frac{3}{10}},$$

$$D_{*a}^{\frac{7}{10}} \left(D_{*a}^{\frac{7}{10}} f(x) \right) = D_{*a}^{\frac{7}{10}} \left(\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{13}{10})} x^{\frac{3}{10}} \right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{5})} x^{-\frac{2}{5}},$$

mais

$$D_{*a}^{\frac{7}{5}} x = J_0^{\frac{7}{5}-2} D^2 x = J_0^{\frac{7}{5}-2} 0 = 0.$$

Théorème 34. La formule de Liebniez pour les opérateurs de Caputo, soit $0 < n < 1$, et soit f, g des foncions analytiques sur $(a - h, a + h)$ pour quelque $h > 0$. Alors

$$D_{*a}^{n}(fg)(x) = \frac{(x-a)^{-n}}{\Gamma(1-n)} g(a)(f(x) - f(a)) + (D_{*a}^{n} g(x)) f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x),$$

pour $a < x < a + \frac{h}{2}$.

Preuve

Appliquons la définition de Caputo, on obtient

$$\begin{aligned} D_{*a}^{n}(fg)(x) &= D_a^n (fg(x) - f(a)g(a)) \\ &= D_a^n (fg(x)) - f(a)g(a) D_a^n[1], \end{aligned}$$

appliquons la formule de Liebneiz pour R-L

$$D_{*a}^{n}(fg)(x) = (D_{*a}^{n} g(x)) f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x) - f(a)g(a) D_a^n[1],$$

on ajoute et soustracte $f(x)g(a)D_a^n[1]$,

$$\begin{aligned} D_{*a}^{n}(fg)(x) &= f(x)(D_a^n(g(x) - g(a))) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x) + g(a)(f(x) - f(a)) D_a^n[1] \\ &= f(x) D_{*a}^{n} g(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x) + g(a)(f(x) - f(a)) D_a^n[1], \end{aligned}$$

Remplaçons $D_a^n[1] = \frac{(x-a)^{-n}}{\Gamma(1-n)}$, on trouve

$$D_{*a}^n(fg)(x) = \frac{(x-a)^{-n}}{\Gamma(1-n)} g(a)(f(x)-f(a)) + (D_{*a}^n g(x))f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} (D^k f)(J_a^{k-n} g)(x).$$

3.2 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Un des intérêts du calcul fractionnaire est qu'il généralise aussi certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques: la dérivée fractionnaire de l'intégrale du même ordre donne l'identité, la dérivée d'une dérivée redonne sous certaines conditions une dérivée, l'intégration par parties reste valable et les opérateurs fractionnaires se conjuguent trés bien avec les transformées de Fourier et Laplace.

Linéarité. Les opérateurs de la diffŕentiation et l'intǵration fractionnaires sont des opérateurs linéaires pour n'importe quelle approche.

Intégration par parties. La formule d'intégration par parties est une des propriéétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais lá encore sous certaines restrictions.On va présenter ici une version simplifiée avec des conditions explicites.

Corollaire 35. Soit $n > 0$, et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m = \lceil n \rceil$. Soit $f \in C^m([a,b])$ et $g \in C^m([a,b])$ alors

$$\int_a^b f(t) D_{a+}^n g(t) dt = \int_a^b D_{b-}^n f(t) g(t) dt,$$
$$\int_a^b f(t) D_{b-}^n g(t) dt = \int_a^b D_{a+}^n f(t) g(t) dt.$$

Transformée de Fourier. La transformé de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ peut-être définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'á l'ordre n sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi)$$

Ce résultat se généralise aux opérateurs fractionnaires définis sur $\mathbb{R}$.

Lemme 36. Soit $0 < n \leq 1$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $D^{k+n-m} f \in L^1(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq m$. Alors

$$\mathcal{F}[J^n f](\xi) = (\pm i\xi)^{-n} \mathcal{F}[f](\xi).$$

Corollaire 37. Soit $n > 0$, et $m = \lceil n \rceil$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathcal{F}[D^n f](\xi) = (\pm i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi).$$