Exercices 02

Exercice 1:

Donner des exemples pour que la dérivée fractionnaire

$$D_a^{n_1} D_a^{n_2} \neq D_a^{n_2} D_a^{n_1},\ D_a^{n_1+n_2} \neq D_a^{n_1} D_a^{n_2}.$$

Exercice 2:

Calculer la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre n des fonctions suivantes avec $n > 0$:

1. $f(x) = C,\ C \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = e^{\omega x}$, $\omega > 0$.
3. $f(x) = (1 + x)^{-1}$.

Exercice 3:

Montrer que pour $n_1, n_2 > 0$, si $f(t) \in C^k([a, b])$, $k \in \mathbb{N}$ et s'il exists $m \in \mathbb{N}$ avec $m \leq k$ et $n_1,\ n_1 + n_2 \in [m - 1, m]$ alors

$$\left(D_{*a}^{n_1} D_{*a}^{n_2} f\right)(t) = \left(D_{*a}^{n_1+n_2} f\right)(t).$$

Exercice 4:

Montrer que, pour $m - 1 < n \leq m$ et $C_j \in \mathbb{R}$,

1. $D_a^n f(t) = D_a^n g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^m C_j t^{n-j}$,
2. $D_{*a}^n f(t) = D_{*a}^n g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{j=1}^m C_j t^{n-j}$.

Exercice 5:

Montrer que pour $f \in A^m([a, b])$, pour $n > 0$ et $m = \lceil n \rceil$, si $D_{*a}^n f = 0$ alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} C_k (x - a)^k,\ C_k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6:

Montrer que, pour $n > 0$ et $m = \lceil n \rceil$, si f est une fonction telque $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, ..., m - 1$ alors les dérivées fractionnaires de R-L et Caputo coïncident, i.e.,

$$D_{*a}^n f = D_a^n f.$$

Exercice 7:

Montrer la formule de Leibniz' pour les opérateurs de Caputo.