Chapter 4

Equations Différentielles Fractionnaires

Les èquations différentielles fractionnaires sont des équations qui impliquent des dérivées d'ordre non entier. Elles peuvent être utilisées pour modéliser des phénomènes physiques tels que la diffusion et la conduction thermique, ainsi que pour d'autres applications en sciences et en biologie. Les méthodes de résolution pour les équations différentielles fractionnaires sont similaires à celles utilisées pour les équations différentielles ordinaires, mais avec des techniques supplémentaires pour traiter les dérivées fractionnaires. Dans ce chapitre, quelques méthodes courantes de résolution des équations différentielles fractionnaires sont présentés.

4.1 La transformée de Laplace

la méthode de la transformée de Laplace a l'avantage de donner directement la solution d'équations différentielles avec des conditions initiales ou aux bord sans nécessité de trouver une solution générale, puis d'en évaluer les constantes arbitraires.
De plus, le tableau prêt des transformées de Laplace réduit le problème de la résolution des équations différentielles à une manipulation plus algébrique

Définition 10. La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, $t \geq 0$ est définie par

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = F(s).$$

La fonction $f(t)$ est appelée la transformée inverse de $F(s)$, noté $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Shift remplaçant s par $s - a$ dans la transformée

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a).$$

La transformée de Laplace des dérivées et intégrales

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau) d\tau\} = \frac{1}{s} F(s).$$

Quelques fonctions et leurs transformées de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}f(t)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^\alpha,\ \alpha > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$cos(bt)$	$s > 0,\ \frac{s}{s^2+b^2}$
$sin(bt)$	$s > 0,\ \frac{b}{s^2+b^2}$
$e^{at} cos(bt)$	$s > a,\ \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at} sin(bt)$	$s > a,\ \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$t^n e^{at},\ n = 1, 2, ...$	$s > a,\ \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

Propriétés.

1. $\mathcal{L}tf(t) = -F'(S)$

2. $\mathcal{L}t^n f(t) = (-1)^n F^{(n)}(s)$

3. $\mathcal{L}(f * g)(t) = F(s)G(s)$, where $(f * g)(t) = \overline{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau}$.

   Si $f(t)$ est discontinue at $t = 0$: $\mathcal{L}f'(t) = s\mathcal{L}f(t) - \lim_{t\to 0^-} f(t)$.

Examples 38. Soit l'equation suivante

$$y' + y = te^{-t},\ y(0) = -3 \tag{4.1}$$

Appliquons la transformée de Laplace en (4.1)

$$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{te^{-t}\}$$

alors

$$s\mathcal{L}\{y\} - y(0) + \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

aprés simplification, on obtient $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

$$Y(s)(s+1) = \frac{1}{(s+1)^2} - 3$$

D'ou

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} - \frac{3}{s+1}$$

Appliquons la transformée inverse de Laplace, on trouve

$$y(t) = t^2e^{-t} - 3e^{-t}.$$

Examples 39. Considérons l'équation suivante:

$$y'' - 2y' + 2y = cos(t),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \tag{4.2}$$

Appliquons la transformée de Laplace en (4.2)

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{cos(t)\}$$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 2[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2-2s+2)} + \frac{s-2}{s^2-2s+2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{5}\left[\frac{s}{(s^2+1)} - \frac{2}{(s^2+1)} + \frac{4(s-1)}{s^2-2s+2} - \frac{2}{s^2-2s+2}\right]$$

Appliquons la transformée inverse de Laplace, on trouve

$$y(t) = \frac{1}{5}\left[cos(t) - 2sin(t) + 4e^t cos(t) - 2e^t sin(t)\right].$$

La transformée de Laplace de l'intégrale au sens de Riemann-Liouville.

On a

$$J^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau$$

oú $n > 0$ et $f \in L^1([a,b])$. Remarquons que $J^n f(t)$ est la convolution de la fonction $t \mapsto t^{n-1}$ et f, alors

$$\mathcal{L}\{J^n f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(n)}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}\mathcal{L}\{f(t)\} = s^{-n}F(s),\ s > 0.$$

Oú $F(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

Examples 40. 1. $f(t) = t^{\alpha},\ \alpha > -1,\ n > 0.$

$\mathcal{L}\{J^n t^{\alpha}\} = s^{-n}\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{n+\beta+1}}.$

2. $f(t) = e^{at}\ n > 0.$

$\mathcal{L}\{J^n e^{at}\} = s^{-n}\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s^n}\frac{1}{s-a}.$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Rappelons que la transformée de Laplace de $f^{(m)}$, m entier, est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\} &= s^m F(s) - s^{m-1}f(0) - ... - f^{(m-1)}(0)\\ &= s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0).\end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{L}\{f^{(m)}(t)\} = s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k f^{(m-k-1)}(0).$$

On sait que la dérivée fractionnaire au sens de R-L d'une fonction f est

pour $n > 0$, $D^n f(t) = D^m J^{m-n} f(t)$, oú $m = \lceil n \rceil$ et $f \in L^1[a,b]$.

Maintenant, si on assume que la transformée de Laplace de f exists, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{D^n f(t)\} &= \mathcal{L}\{D^m J^{m-n} f(t)\}\\ &= s^m \mathcal{L}\{J^{m-n} f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{m-k-1}\left\{J^{m-n} f(0)\right\}\\ &= s^m[s^{n-m}F(s)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{m-k-1}\left\{D^{n-m} f(0)\right\}\\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{n-k-1} f(0)\\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{k-1} D^{n-k} f(0),\ \ s > 0.\end{aligned}$$

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

La dérivée fractionnaire de Caputo de $f(t)$, is given:

for $n > 0$, $m = \lceil n \rceil$

$$D_*^n f(t) = J^{m-n} D^m f(t).$$

Alors, la tronsformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de $f(t)$ est donnée par

$$\mathcal{L}\{D_*^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{n-k-1} D^k f(0),\ \ s > 0.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{D_*^n f(t)\} &= \mathcal{L}\{J^{m-n} D^m f(t)\} \\
&= s^{-m+n}\mathcal{L}\{D^m f(t)\} \\
&= s^{-m+n}\left[s^m F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} f^{(k)}(0)\right] \\
&= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

La transformée de Laplace de la fonction Mittag-Leffler.

La fonction Mittag-Leffler est définie par $E_{\alpha,\beta}(t) = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma \alpha k + \beta}},\ t, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$

Théorème 41.

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a},\ s^\alpha > a.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\} &= \int_0^\infty e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha) dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma \alpha k + \beta} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma \alpha k + \beta} \mathcal{L}\{t^{\alpha k + \beta - 1}\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{\Gamma \alpha k + \beta} \frac{\Gamma \alpha k + \beta}{s^{\alpha k + \beta}} \\
&= \frac{1}{s^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s^\alpha}\right)^k \\
&= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a},\ s^\alpha > a.
\end{aligned}$$

Examples 42. Soit l'équation suivante

$$y''(t) + D_0^{\frac{3}{2}} y(t) + y(t) = \phi(t)$$

Appliquons la transformée de Laplace, Posons $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ et $\psi(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{D_0^{\frac{3}{2}} y(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)] + [s^{\frac{3}{2}} Y(s) - s^{\frac{1}{2}} y(0) - s^{\frac{-1}{2}} y'(0)] + Y(s) = \psi(s)$$

$$(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1) Y(s) = \psi(s) + y(0)(s + s^{\frac{1}{2}}) y(0) + (s^{\frac{-1}{2}} + 1) y'(0)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1} . \Big(\psi(s) + y(0)(s + s^{\frac{1}{2}}) y(0) + (s^{\frac{-1}{2}} + 1) y'(0)\Big)$$

$$Y(s) = y(0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^{\frac{3}{2}k+1}}{(s^2+1)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^{\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}}}{(s^2+1)^{k+1}} \right) +$$

$$y'(0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^{\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}}}{(s^2+1)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^{\frac{3}{2}k}}{(s^2+1)^{k+1}} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \psi(s) \frac{s^{\frac{3}{2}k}}{(s^2+1)^{k}}.$$

Utilisons la transformée inverse de Laplace, on trouve

$$y(t) = y(0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\frac{1}{2}k} E_{2,\frac{1}{2}(k+2)}^{(k+1)}(-t^2) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\frac{1}{2}(k+1)} E_{2,\frac{1}{2}(k+3)}^{(k+1)}(-t^2) \right)$$

$$+ y'(0) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\frac{1}{2}(k+3)} E_{2,\frac{1}{2}(k+5)}^{(k+1)}(-t^2) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\frac{1}{2}(k+2)} E_{2,\frac{1}{2}(k+4)}^{(k+1)}(-t^2) \right)$$

$$+ \int_0^t \phi(t-\tau) \tau^{\frac{1}{2}(k+2)} E_{2,\frac{1}{2}(k+4)}^{(k+1)}(-\tau^2) d\tau.$$

Exercice. Résoudre les équations suivantes

- $D_{*0}^{0.7} y(t) - y(t) = t^3 - 2$, $y(0) = 2$.
- $y'(t) - D_{*0}^{1.3} y(t) = exp(t) - 1$, $y(0) = 0$.

$y(t)$	$\mathcal{L}y(t)$
t^{α}	$\frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha+1}}$
$\frac{t^{\alpha-1}e^{-at}}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{1}{(s+a)^{\alpha}}$
$t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^{\alpha})$	$\frac{1}{s^{\alpha}-a}$
$E_{\alpha}(-at^{\alpha})$	$\frac{s^{\alpha}}{s(s^{\alpha}+a)}$
$1-E_{\alpha}(-at^{\alpha})$	$\frac{a}{s(s^{\alpha}+a)}$
$t^{\alpha}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})$	$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}$
$\frac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
$tE_{\beta}(at)-\beta E_{\beta+1}(at)$	$\frac{1}{s^{\beta}(s-a)^{2}}$
$t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}(-at^{\alpha})-\beta E_{\beta+1}(at)$	$\frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^{\alpha}+a)^{\gamma}}$

4.2 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian est une méthode analytique pour résoudre des équations différentielles fractionnaires non linéaires. Cette méthode est basée sur la décomposition de la solution en une série de fonctions Adomian. Ces fonctions sont calculées en utilisant une série d'opérateurs différentiels et de fonctions de base. Cette méthode est une méthode puissante car elle peut résoudre des équations différentielles fractionnaires non linéaires sans avoir besoin de simplifications ou d'approximations. Cependant, cette méthode peut être difficile à appliquer pour certaines àquations complexes. De plus, la méthode de décomposition d'Adomian ne garantit pas toujours la convergence de la solution et peut nécessiter des itérations pour obtenir une solution précise.
Considérons l'équation différentielle suivante:

$$Lu + Ru + Nu = g. \tag{4.3}$$

Oú L est un opérateur linéaire inversible R est le reste de l'opérateur linéaire et N est l'opérateur nonlinéaire. Alors

$$L^{-1}Lu + L^{-1}Ru + L^{-1}Nu = L^{-1}g. \tag{4.4}$$

Et, on a $L^{-1}Lu = u - \phi$, donc $u = \phi + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$, oú ϕ apparaitre de condition initiale.
La méthode de décomposition d'Adomian suppose que la solution u s'écrire de la forme d'une série comme suit

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n,$$

remplaçons dand l'équation (4.3), on obtient la récurrence suivante

$$\begin{cases} u_0 = \phi + L^{-1}g, \\ u_n = -L^{-1}Ru_{n-1} - L^{-1}Nu_{n-1}, \ n \geq 1. \end{cases}$$

On décompose le term nonlinéaire Nu en séries $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, oú les A_n depends en $u_0, u_1, ..., u_n$ sont apelés les polynomes d'Adomian.

Cherchons d'une solution u de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Soit $V = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i$

$$\begin{aligned} N(V(\lambda)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i) \right]_{\lambda=0} \lambda^n. \\ A_n &= \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i) \right]_{\lambda=0} = A_n(u_0, u_1, ..., u_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0 =& N(u_0). \\ A_1 =& \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{d\lambda} N(u_0 + u_1\lambda + ...) \right]_{\lambda=0} = u_1 N'(u_0). \\ A_2 =& \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} N(u_0 + u_1\lambda + ...) \right]_{\lambda=0} = u_2 N'(u_0) + \frac{u_1^2}{2} N''(u_0). \\ A_3 =& \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3}{d\lambda^3} N(u_0 + u_1\lambda + ...) \right]_{\lambda=0} = u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} N^{(3)}(u_0). \\ & \vdots \end{aligned}$$

Alors $N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$.

Examples 43. Pour l'opérateur $Ny = f(y)$

$$\begin{aligned}
A_0 =& f(y_0).\\
A_1 =& y_1 f'(y_0).\\
A_2 =& y_2 f'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} f''(y_0).\\
A_3 =& y_3 f'(y_0) + y_1 y_2 f''(y_0) + \frac{y_1^3}{3!} f^{(3)}(y_0).\\
A_4 =& y_4 f'(y_0) + (y_1 y_3 + \frac{y_2^2}{2!}) f''(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} y_2 f^{(3)}(y_0) + \frac{y_1^4}{4!} f^{(4)}(y_0).\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Examples 44. Pour l'opérateur $Ny = y^2$

$$\begin{aligned}
A_0 =& y_0^2.\\
A_1 =& y_1 f'(y_0) = 2y_1 y_2.\\
A_2 =& y_2 f'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} f''(y_0) = 2y_0 y_2 + y_1^2.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Exercice:

$$y'(t) + y^2(t) = -1,\ y(0) = 0.$$

La solution exacte est $y(t) = tan(-t)$.

$$y'(t) = -y^2(t) - 1,\ L = \frac{d}{dt}, Ny = y^2.$$

$$\begin{cases} y_0 = -t, \\ y_n = -J(A_{n-1}),\ n \geq 1. \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
y_0 =& y(0) - J\{1\} = -t.\\
y_1 =& -J\{A_0\} = \frac{-t^3}{3}.\\
y_2 =& -J\{A_1\} = \frac{-2t^5}{15}.\\
y_3 =& -J\{A_2\} = \frac{-17t^7}{315}.\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

D'ou $y = y_0 + y_1 + y_2 + ...$

La solution analytique des équations différentielles fractionnaires linéaires á coefficients constants

Considérons léquation différentielle linéaire á coefficients constants suivante

$$a_n D^{\beta_n} y(t) + a_{n-1} D^{\beta_{n-1}} y(t) + ... + a_1 D^{\beta_1} y(t) + a_0 D^{\beta_0} y(t) = f(t) \tag{4.5}$$

$y^i = 0$ pour $i = 0, 1, ..., n$.

Oú $D^\beta = D^\beta_{0,t}$, $\quad \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_{n-1} < n \leq \beta_n < n+1$ et $a_i (i = 0, 1, ..., n)$ est une constante réelle.

Appliquons l'opérateur inverse $D^{-\beta_n}$ á l'équation (4.5), on obtient

$$y(t) + \frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + ... + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t) = \frac{1}{a_n} D^{-\beta_n} f(t).$$

Utilisons la méthode de décomposition d'Adomian, on obtient la récurrence suivante

$$
\begin{aligned}
y_0(t) =& \frac{1}{a_n} D^{-\beta_n} f(t).\\
y_1(t) =& -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + ... + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t)\right) y_0(t).\\
y_2 =& (-1)^2 \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + ... + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t)\right)^2 y_0(t).\\
&\vdots\\
y_2 =& (-1)^s \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + ... + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t)\right)^s y_0(t).
\end{aligned}
$$

Ajoutons les termes de récurrence, on obtient la solution par la de décomposition d'Adomian

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{s=0}^{\infty} y_s(t) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + ... + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t)\right)^s y_0(t)\\
&= \frac{1}{a_n} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} D^{\beta_{n-1}-\beta_n} y(t) + ... + \frac{a_0}{a_n} D^{\beta_0-\beta_n} y(t)\right)^s D^{-\beta_n} f(t).
\end{aligned}
$$

Exercice:

Considérons l'équation fractionnaire de Riccati

$$
\begin{cases}
D_{*0}^{\alpha} y(t) = -y^2(t) + 1, \quad 0 < \alpha \leq 1,\\
\qquad y(0) = 0.
\end{cases}
$$

Appliquons le shéma d'Adomian

$$
\begin{cases}
y_0 = y(0) + J^{\alpha}\{1\} = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma\alpha+1},\\
y_{n+1} = -J^{\alpha}(A_{n-1}), \ n \geq 0.
\end{cases}
$$

Oú les A_n sont les polynomes d'Adomian de $f(y) = y^2$.

$$
\begin{aligned}
y_0 =& \frac{t^{\alpha}}{\Gamma\alpha + 1}.\\
y_1 =& -J^{\alpha}\{y_0^2\} = -\frac{\Gamma 1 + 2\alpha}{\alpha^2 \Gamma 1 + 3\alpha} t^{3\alpha}.\\
y_2 =& -J^{\alpha}\{2 y_0 y_1\} = -\frac{16 \Gamma 2\alpha \Gamma 4\alpha}{\alpha \Gamma 1 + 3\alpha \Gamma 1 + 5\alpha} t^{5\alpha}.\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Alors

$$y(t) = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma\alpha+1} - \frac{\Gamma 1+2\alpha}{\alpha^{2}\Gamma 1+3\alpha}t^{3\alpha} - \frac{16\Gamma 2\alpha\Gamma 4\alpha}{\alpha\Gamma 1+3\alpha\Gamma 1+5\alpha}t^{5\alpha} + ...$$

4.3 La méthode de la perturbation d'homotopie

La méthode de perturbation d'homotopie est une méthode numérique pour résoudre des équations différentielles fractionnaires non linéaires. Cette méthode consiste à introduire un petit paramètre dans l'équation différentielle fractionnaire et à considérer l'équation comme une série de puissance de ce paramètre. Ensuite, cette série de puissance est résolue en utilisant la méthode d'homotopie pour trouver une solution approchée de l'équation originale. Enfin, en augmentant progressivement la valeur du paramètre, la solution est améliorée jusqu'à ce que la solution finale soit atteinte.

Pour utilisée l'idée pricipale de cette méthode, on considére l'équation nonlinéaire suivante:

$$A(u) + f(r) = 0, r \in \Omega, \tag{4.6}$$

$$B(u.\frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, r \in \Gamma. \tag{4.7}$$

oú A est un opérateur différentielle générale. B est l'opérateur au frontiére, $f(r)$ est une fonction analytique et Γ est la frontiére du domain Ω.

En générale, l'opérateur A peut être écrits en deux parties L et N, oú L est la partie linéaire et N est la partie nonlinéaire de l'équation, donc on peut l'écrire comme

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \tag{4.8}$$

définissons la homotopie: $V(x, \rho) : \Omega \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ satisfait

$$H(V, \rho) = (1 - \rho)[L(V) - L(u_0)] + \rho[L(V) + N(V) - f(r)] = 0. \tag{4.9}$$

Oú

$$H(V, \rho) = L(V) - L(u_0) + \rho L(u_0) + \rho[N(V) - f(r)] = 0. \tag{4.10}$$

Oú $r \in \Omega$, $\rho \in [0,1]$ et u_0 est la condition initiale approximative de (4.9) et (4.10), on a :

$$H(V,0) = L(V) - L(u_0) = 0,$$

$$H(V,1) = L(V) + N(V) - f(r) = 0.$$

Le changement de ρ de zero vers l'unité est juste que $V(r,\rho)$ passes de $u_0(r)$ vers $u(r)$, dans la topologie, on appelle ça une déformation.

$L(V) - L(u_0)$ et $L(V) + N(V) - f(r)$ sont homotopies. L'hypothése de base est que la solution de (4.9) ou (4.10) est

$$V = V_0 + \rho V_1 + \rho^2 V_2 + ...$$

La solution approximative de notre probléme peut être éxprimer comme

$$u = \lim_{\rho \to 1} V = v_0 + V_1 + V_2...$$

Examples 45. On considére l'equation différentielle suivante:

$$\begin{cases} u' + u^2 = 0, \quad t \geq 0, \\ \quad u(0) = 1. \end{cases}$$

La solution exacte est $u(t) = \frac{1}{1+t}$.

Dans la vue de HPM, on construit l'homotopie suivante

$$(1-\rho)(v' - u_0') + \rho(v' + v^2) = 0, \ \rho \in [0,1], \ t \in \Omega. \tag{4.11}$$

Par HPM, définissons l'homotopie: $V : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ et $u_0 = 1$.

La solution est

$$V = V_0 + \rho V_1 + \rho^2 V_2 + ... \tag{4.12}$$

De (4.11) et (4.12), on obtient

$$\rho^0 : V_0' = u_0'$$

$$\rho^1 : V_1' + u_0' + V_0^2 = 0,\ V_1(0) = 0$$

$$\rho^2 : V_2' + 2V_0V_1 = 0,\ V_2(0) = 0$$

$$\vdots$$

Appliquons l'opérateur intégrale, on obtient:

$$V_0(t) = 1$$

$$V_1(t) = -t$$

$$V_2(t) = t^2$$

$$\vdots$$

La solution est

$$\begin{aligned} V &= v_0 + V_1 + V_2 ... \\ &= 1 - t + t^2 + ... \\ &= \frac{1}{1-t}. \end{aligned}$$

Résolution d'un probléme fractionnaire par la méthode de perturbation d'homotopie

Soit le probéme fractionnaire suivant

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)),\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)},\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Le probléme peut s'écrire de la forme

$$\begin{cases} D^\alpha y(t) + Ly(t) + Ny(t) = g(t) \\ y^{(k)}(0) = c_k,\ k = 0, 1, ..., n-1. \end{cases}$$

Oú les c_k sont les conditions initiales, L est l'opérateur linéaire qui peut contenir d'autres opérateurs fractionnaires.

Dans la vue de la méthode de perturbation d'homotopie, on construit l'homotopie suivante

$$D^\alpha y(t) + \rho \left[Ly(t) + Ny(t) - g(t)\right] = 0, \;\; \rho \in [0,1]. \tag{4.13}$$

Si $\rho = 0$ alors $D^\alpha y(t) = 0$.

Si $\rho = 1$ alors l'equation revient au probléme initial.

Utilisons le paramétre ρ, on écrit la solution de la forme

$$y(t) = y_0(t) + \rho y_1(t) + \rho^2 y_2(t) + ... \tag{4.14}$$

Posons $Ny(t) = h(y)$, et remplaçons (4.14) dans (4.13) et ramassons les termes du même ordre de ρ, on obtient

$$\begin{aligned}
&\rho^0 : D^\alpha y_0(t) = 0. \\
&\rho^1 : D^\alpha y_1(t) = -Ly_0(t) - h_1(y_0) + g(t). \\
&\rho^2 : D^\alpha y_2(t) = -Ly_1(t) - h_2(y_0, y_1). \\
&\rho^3 : D^\alpha y_3(t) = -Ly_2(t) - h_3(y_0, y_1, y_2). \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Oú les fonctions $h_1, h_2, ...$ satsfaient l'équation suivante

$$h(y_0(t) + \rho y_1(t) + \rho^2 y_2(t) + ...) = h_1(y_0) + \rho h_2(y_0, y_1) + \rho^2 h_3(y_0, y_1, y_2) + ...$$

Appliquons l'opérateur J^α l'inverse de D^α, les premiers termes de la HPM solution sont

$$
\begin{aligned}
y_0(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{t^k}{k!},\ n = \lceil \alpha \rceil \\
y_1(t) &= -\, J^\alpha(Ly_0(t)) - J^\alpha(h_1(y_0)) + J^\alpha(g(t)). \\
y_2(t) &= -\, J^\alpha(Ly_1(t)) - J^\alpha(h_2(y_0, y_1)). \\
y_3(t) &= -\, J^\alpha(Ly_2(t)) - J^\alpha(h_3(y_0, y_1, y_2)). \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Examples 46. Considérons le probléme suivant

$$
\begin{cases}
D^\alpha_{*0} y(t) = -y(t), \qquad 0 < \alpha \leq 2, \\
y(0) = 0,\ y'(0) = 0.
\end{cases}
$$

On peut construire l'homotopie suivante

$$
D^\alpha_{*0} y(t) + \rho y(t) = 0 \tag{4.15}
$$

Remplaçons (4.14) dans (**??**) et ramassons les termes du même ordre de ρ, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\rho^0 : D^\alpha y_0(t) = 0. \\
&\rho^1 : D^\alpha y_1(t) = -y_0. \\
&\rho^2 : D^\alpha y_2(t) = -y_1. \\
&\rho^3 : D^\alpha y_3(t) = -y_2. \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Appliquons l'opérateur J^α l'inverse de D^α, les premiers termes de la HPM solution sont

$$\begin{aligned}
y_0(t) =& 1 \\
y_1(t) =& -J^\alpha(y_0(t)) = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \\
y_2(t) =& -J^\alpha(y_1(t)) = -J^\alpha(-\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}. \\
y_3(t) =& -J^\alpha(y_2(t)) = -\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}. \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Alors la solution est donnée par

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha+1)}.$$