Chapitre 2

Ensembles et Applications

2.1 Ensembles

2.1.1 Définitions et exemples

Définition 2.1 *Un ensemble est une collection d'objets, ces objets s'appellent les éléments de l'ensemble.*

- *Nous désignerons en général les ensembles par des lettres majuscules : E, F, A, B,etc. Les éléments d'un ensemble seront désignés en général par des lettres minuscules : a, b, x, y, etc.*
- *Si a est un élément d'un ensemble E, on écrit $a \in E$ et on lit «a appartient à E».*
- *Si a n'est pas un élément d'un ensemble E, on écrit $a \notin E$ et on lit «a n'appartient pas à E».*

Définition 2.2 *L'ensemble vide noté $\varnothing$, c'est l'ensemble qui ne contenant aucun élément.*

Exemble 2.1

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Exemble 2.2

Soit

$$E = \{x \in \mathbb{N}/x \leq 8\}$$

E est un ensemble défini par

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Le nombre d'éléments de E est fini, on l'appelle **cardinal de** E et on note $Card\,(E) = 9$.

2.1.2 Parties d'un ensemble et complémontaire

Définition 2.3 *On dit qu'un ensemble F est une partie d'un ensemble E ou que F est inclus dans E ou que F est un sous ensemble de E, si tout élément de F est un élément de E et on note $F \subset E$.*

$$(F \subset E) \Leftrightarrow (\forall a, a \in F \Rightarrow a \in E)$$

Définition 2.4 *On dit que l'ensemble E égal à l'ensemble F si on a : $(E \subset F)$ et $(F \subset E)$.*

$$(E = F) \Leftrightarrow ((E \subset F) \wedge (F \subset E))$$

– *L'ensemble des parties de E est noté par $P(E)$.*

$$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

– *Si E possède n élément, alors $P(E)$ possède 2^n.*

Exemple 2.3

Soit

$$E = \{a, b, c, d\}$$

On a $Card(E) = 4$ donc $Card(P(E)) = 2^4 = 16$.

$$P(E) = \left\{ \begin{array}{c} \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \\ \\ \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \end{array} \right\}$$

Définition 2.5 *Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A et on note $C_E A$.*

$$C_E A = \{a \in E / a \notin A\}$$

Propriété 2.1

Soient A, B deux parties d'un ensemble E.

1. $C_E(C_E A) = A$, $C_E \varnothing = E$, $C_E E = \varnothing$.
2. *Si* $A \subset B$ *alors* $C_E B \subset C_E A$.

Preuve

Soient A, B deux parties d'un ensemble E telles que $A \subset B$, alors

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a, a \in A \Rightarrow a \in B$$

$$\Leftrightarrow \forall a, a \notin B \Rightarrow a \notin A$$

$$\Leftrightarrow \forall a, a \in C_E B \Rightarrow a \in C_E A$$

$$\Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$$

2.1.3 Intersection et réunion

Définition 2.6 *On appelle intersection de deux ensembles E et F, et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments x tels que $x \in E$ et $x \in F$.*

$$E \cap F = \{x : x \in E \quad et \quad x \in F\}$$

Si $E \cap F = \varnothing$, on dit que E et F sont disjoint.

Définition 2.7 *On appelle réunion de deux ensembles E et F, et on note $E \cup F$, l'ensemble des éléments x tels que $x \in E$ ou $x \in F$.*

$$E \cup F = \{x : x \in E \quad \text{ou} \quad x \in F\}$$

Propriété 2.2
Soient A, B et C trois ensembles.

1. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$
2. $A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B.$
3. $A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

Preuve Soient A, B et C trois ensembles.
1. Soit $x \in A \cap B$, on a :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \in A)$$

$$\Leftrightarrow x \in B \cap A$$

d'où $A \cap B = B \cap A$.
Soit $x \in A \cup B$, on a :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in B) \vee (x \in A)$$

$$\Leftrightarrow x \in B \cup A$$

d'où $A \cup B = B \cup A$.
2.3. Trivial.

4. Soit $x \in A \cap (B \cap C)$

$$x \in A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \in C))$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \wedge (x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cap C$$

D'où $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
Pour la deuxième égalité, même raisonnement que la première égalité.
5. Soit $x \in A \cap (B \cup C)$

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$$

$$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

D'où $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Pour la deuxième égalité, même raisonnement que la première égalité.

2.1.4 Différence et différence symétrique

Définition 2.8 *On appelle différence de deux ensembles E et F, et on note $E \diagdown F$, l'ensemble des éléments x tels que $x \in E$ et $x \notin F$.*

$$E \diagdown F = \{x : x \in E \quad et \quad x \notin F\}$$

Définition 2.9 *On appelle différence symétrique de deux ensembles E et F, et on note $E\Delta F$, l'ensemble difini par :*

$$E\Delta F = (E \diagdown F) \cup (F \diagdown E) = (E \cup F) \diagdown (E \cap F)$$

Exemple 2.4
Soient A, B et C trois ensembles tels que

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{0, 1, 4, 5, 6\}$$

$$C = \{0, 2, 3, 4, 5\}$$

- B et C sont des sous ensembles de A.
- $B \cap C = \{x : x \in B \text{ et } x \in C\} = \{0, 4, 5\}$
- $B \cup C = \{x : x \in B \text{ ou } x \in C\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $B \diagdown C = \{x : x \in B \text{ et } x \notin C\} = \{1, 6\}$
- $C \diagdown B = \{x : x \in C \text{ et } x \notin B\} = \{2, 3\}$.
- $B \Delta C = \{1, 2, 3, 6\}$.
- $C_A B = \{x \in A / x \notin B\} = \{2, 3, 7\}$
- $C_A C = \{x \in A / x \notin C\} = \{1, 6, 7\}$

Théorème 2.1 *Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Alors on a les égalités suivantes :*

1. $C_E (A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.
2. $C_E (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.

Preuve
1. Soit $x \in C_E (A \cap B)$. Alors $x \in E$ et $x \notin A \cap B$, donc $x \notin A$ ou $x \notin B$. Donc $x \in C_E A$ ou $x \in C_E B$. Donc $x \in C_E A \cup C_E B$, d'où l'inclusion

$$C_E (A \cap B) \subset C_E A \cup C_E B.$$

Réciproquement, Soit $x \in C_E A \cup C_E B$. Si $x \in C_E A$, alors $x \notin A$ donc$x \notin A \cap B$, et par suite $x \in C_E (A \cap B)$.
De même si $x \in C_E B$, alors $x \notin B$ donc$x \notin A \cap B$, et par suite $x \in C_E (A \cap B)$.
Dans les deux cas $x \in C_E (A \cap B)$, d'où l'inclusion

$$C_E A \cup C_E B \subset C_E (A \cap B).$$

La première égalité est donc démontrée.
2. Pour la deuxième égalité, en posant $A_1 = C_E A$, $B_1 = C_E B$ et en utilisant $C_E (C_E A) = A$.

2.1.5 Partition d'un ensemble

Définition 2.9 *On appelle partition d'un ensemble E, toute famille $G \subset P(E)$ telle que :*

a- *Les éléménts de G sont disjoints deux à deux, c'est à dire*

$$\forall A, B \in G, A \cap B = \varnothing$$

b- *G est un recouvrement de E.*

$$\underset{A \in G}{\cup} A = E$$

Exemple 2.5

Soit E un ensemble tel que :

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

1. La famille

$$G_1 = \{\{0, 1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$$

est une partition de E.
2. La famille

$$G_2 = \{\{0, 1\}, \{2\}, \{2, 3, 4\}\}$$

n'est pas une partition de E, car $\{2\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\} \neq \varnothing$.

2.1.6 Produit cartésien

Définition 2.10 *Soient E, F deux ensembles.*
On appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Exemple 2.6
Soient E, F deux ensembles tels que :

$$E = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad F = \{a, b, c\}$$

Alors,

$$E \times F = \left\{ \begin{array}{c} (1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (1, b), (2, b), (3, b), (4, b), \\ \\ (1, c), (2, c), (3, c), (4, c) \end{array} \right\}$$

$$F \times E = \left\{ \begin{array}{c} (a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), (a, 3), (b, 3), \\ \\ (c, 3), (a, 4), (b, 4), (c, 4) \end{array} \right\}$$

Remarque 2.1 *$E \times F = F \times E$ si et seulement si $E = F$.*

2.2 Applications

Définition 2.11 O*n appelle application d'un ensemble E dans un ensemble F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F qui à tout élément $x \in E$ fait correspondre un unique élément $y \in F$ noté $f(x)$.*

$$f : E \to F$$

$$x \mapsto f(x)$$

- *-E : l'ensemble de départ.*
- *F : l'ensemble d'arrivée*
- *x : l'antécédent de y par f.*
- *$y = f(x)$: l'image de x par f.*

$$(f : E \to F \text{ est une application}) \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E\, (x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)))$$

Exemple 2.7

1. $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

   $$x \mapsto \tfrac{1}{1+x^2}$$

   f est une application.

2.
$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$

g n'est pas une application. (Par exemple l'élément $x = 3$ n'a pas une image par g).

3. L'application identité Id
$$Id : E \to E$$
$$x \mapsto Id\,(x) = x$$

2.2.1 Egalité deux applications

On dit que deux applications f, g sont égales si

1. *Elles ont un même ensemble de départ E et un même ensemble d'arrivée F.*
2. *Pour tout $x \in E, f(x) = g(x)$.*

On note $f = g$.

2.2.2 Compositions d'applications

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par :
$$\forall x \in E, (g \circ f)\,(x) = g\,(f\,(x))$$
Cette application est appelée composée des applications f et g.

2.2.3 Restriction et prolongement

Soient f une application de E dans F et $A \subset E \subset G$.
La restriction de f à A est définie par :
$$f_{/A} : A \to F$$
$$x \mapsto f_{/A}\,(x) = f\,(x)$$

On appelle prolongement de f à G, toute application $g : G \to F$ telle que pour tout $x \in G, g(x) = f(x)$.
On dit aussi que f est un prolongement de $f_{/A}$.

2.2.4 Injection, surjection et bijection

Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F.

Injection

On dit que f est une application injective si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in E; \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ou

$$\forall x_1, x_2 \in E; \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemple 2.8
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x^2.$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

Donc, f est une application injective.
Exemple 2.9
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 + x.$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 + x_1 + x_2) = 0.$$

Donc, on peut trouver deux éléments différents ont même image. Par exemple pour $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$,on a : $g(x_1) = g(x_2) = 6$.
Alors, g n'est pas une application injective.

Surjection

On dit que f est une application surjective si

$$\forall y \in F, \exists x \in E; \quad y = f(x)$$

Exemple 2.10
Soit $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ une application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = \tfrac{3x+1}{x-2}.$$

Soit $y \in \mathbb{R} - \{3\}$, on cherche un élément x de $\mathbb{R} - \{2\}$ s'il existe tel que $y = f(x)$.

On a :

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{3x+1}{x-2}$$

$$\Rightarrow y\,(x-2) = 3x+1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-3}.$$

$x \in \mathbb{R} - \{2\}$?
Par l'absurde, supposons que $x = 2$ et on cherche une contradiction.

$$x = 2 \Leftrightarrow \frac{2y+1}{y-3} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2y+1 = 2\,(y-3)$$

$$\Leftrightarrow 1 = -6.$$

Qui est impossible. Donc d'aprés le principe de raisonnement par l'absurde, on déduit que $x \neq 2$.
D'où f est une application surjective.
Exemple 2.11
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 3x.$$

Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche un élément x de $\mathbb{R}$ s'il existe tel que $y = g(x)$.
On a :

$$y = g(x) \Rightarrow y = x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - y = 0$$

Cette équation admet des solutions pour $y \in \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right[$. Donc pour $y \notin \left]-\infty, -\frac{9}{4}\right[$, l'élément y n'a pas d'antécédent.
Alors, g n'est pas une application surjective.

Bijection

On dit que f est une application bijective si f est une application injective et surjective.

$$\forall y \in F, \exists! x \in E; \quad y = f\,(x)$$

Exemple 2.12
Soit $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ une application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}\,, f(x) = \frac{3x+1}{x-2}.$$

f est une application surjective (voir l'exemple 2.10).
Reste à montrer que f est une application injective.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{2\}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-2} = \frac{3x_2+1}{x_2-2}$$

$$\Rightarrow (3x_1+1)(x_2-2) - (x_1-2)(3x_2+1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

Donc, f est une application injective.
D'où f est une application bijective.
Théorème de la bijection :
Si f continue et strictement croissante (Resp : strictement décroissante) sur un intervalle $[a,b]$, alors f réalise une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (Resp : $[f(b), f(a)]$).
(Cela vaut aussi pour un intervalle ouvert).

2.2.5 L'application réciproque

Si $f : E \to F$ est une application bijective, alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = Id_E \quad \text{et} \quad f \circ g = Id_F.$$

L'application g est appelée l'inverse ou la réciproque de f et on note :

$$g = f^{-1}$$

Exemple 2.13
Soit $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ une application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = \frac{3x+1}{x-2}.$$

f est une application bijective (voir l'exemple 2.12), alors elle est inversible et on a :

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{2\}$$

$$x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$$

Proposition 2.1 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications, alors :*

1. $(f \text{ est injective}) \wedge (g \text{ est injective}) \Rightarrow (g \circ f \text{ est injective})$.
2. $(f \text{ est surjective}) \wedge (g \text{ est surjective}) \Rightarrow (g \circ f \text{ est surjective})$.
3. $(f \text{ est bijective}) \wedge (g \text{ est bijective}) \Rightarrow \left(g \circ f \text{ est bijective et } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\right)$.

Preuve
1. Supposons que $(f \text{ est injective}) \wedge (g \text{ est injective})$ et montrons que $g \circ f$ est injective.
Soient $a, b \in E$, on a :

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b))$$

$$\Rightarrow f(a) = f(b) \quad \text{(car } g \text{ est injective)}$$

$$\Rightarrow a = b \quad \text{(car } f \text{ est injective)},$$

ce qui montre que $g \circ f$ est une application injective.
2. Supposons que (f est surjective) $\wedge$ (g est surjective) et montrons que $g \circ f$ est surjective.
Soit $z \in G$, comme g est surjective, alors il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Comme $y \in F$ et f est surjective, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g(y) = g(f(x))$.
On déduit que pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$.
Ce qui montre que $g \circ f$ est une application surjective.
3. Supposons que (f est bijective) $\wedge$ (g est bijective) et montrons que
$\left(g \circ f \text{ est bijective et } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}\right)$.
De 1 et 2 on déduit que $g \circ f$ est une application bijective.
Soit $z \in G$, alors il existe $y \in F$ et $x \in E$ tel que $z = g(y), y = f(x)$ et $z = g(f(x))$.
Donc,

$$y = g^{-1}(z)$$

$$x = f^{-1}(y)$$

$$x = (g \circ f)^{-1}(z)$$

Alors,

$$(g \circ f)^{-1}(z) = x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(z)$$

D'où

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Proposition 2.2 *Soient $f : E \to F$ et $g : F' \to G$ deux applications telles que $F' \subset F$, alors :*

1. ($g \circ f$ est injective) $\Rightarrow$ (f est injective) .
2. ($g \circ f$ est surjective) $\Rightarrow$ (g est surjective) .

Preuve
1. Supposons que ($g \circ f$ est injective) et montrons que (f est injective)
Soient $a, b \in E$, on a :

$$f(a) = f(b) \Rightarrow g(f(a)) = g(f(b)) \quad (\text{car } g \text{ est } \cancel{\text{injective}}) \quad \text{une application}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$$

$$\Rightarrow a = b \quad (\text{car } g \circ f \text{ est injective}),$$

ce qui montre que f est une application injective.
2. Supposons que ($g \circ f$ est surjective) et montrons que (g est surjective).
Soit $z \in G$, alors il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Donc, il existe $y = f(x) \in F$ tel que $z = g(f(x)) = g(y)$.
On déduit que pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Ce qui montre que g est une application surjective.

2.2.6 Image directe - Image réciproque

Soient E, F deux ensembles et f une application de E dans F.
Définition 2.12 *On appelle image directe d'un ensemble $A \subset E$, l'ensemble*

$$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\}$$

Définition 2.13 *On appelle image réciproque d'un ensemble $B \subset F$, l'ensemble*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}$$

Proposition 2.3 *Soient $f : E \to F$ une application et $A, B \subset E$ et $M, N \subset F$. Alors :*

[redacted]
1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.
4. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.
5. $f^{-1}(C_F M) = C_E f^{-1}(M)$.

Preuve
1. Soit $y \in F$, alors

$$y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B, y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\left((x \in A \vee x \in B) \wedge (y = f(x))\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\left((x \in A \wedge y = f(x)) \vee (x \in B \wedge y = f(x))\right)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x, (x \in A \wedge y = f(x))) \vee (\exists x, (x \in B \wedge y = f(x)))$$

$$\Leftrightarrow (y \in f(A)) \vee (y \in f(B))$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

d'où $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Soit $y \in F$, alors

$$y \in f(A \cap B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cap B, y = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\left((x \in A \wedge x \in B) \wedge (y = f(x))\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\left((x \in A \wedge y = f(x)) \wedge (x \in B \wedge y = f(x))\right)$$

$$\Rightarrow (\exists x, (x \in A \wedge y = f(x))) \wedge (\exists x, (x \in B \wedge y = f(x)))$$

$$\Rightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \in f(B))$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$$

d'où $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.
3. Soit $x\in E$, alors
$$x\in f^{-1}(M\cup N)\Leftrightarrow f(x)\in M\cup N$$
$$\Leftrightarrow (f(x)\in M)\vee(f(x)\in N)$$
$$\Leftrightarrow (x\in f^{-1}(M))\vee(x\in f^{-1}(N))$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}(M)\cup f^{-1}(N)$$
d'où $f^{-1}(M\cup N)=f^{-1}(M)\cup f^{-1}(N)$.
4. Soit $x\in E$, alors
$$x\in f^{-1}(M\cap N)\Leftrightarrow f(x)\in M\cap N$$
$$\Leftrightarrow (f(x)\in M)\wedge(f(x)\in N)$$
$$\Leftrightarrow (x\in f^{-1}(M))\wedge(x\in f^{-1}(N))$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}(M)\cap f^{-1}(N)$$
d'où $f^{-1}(M\cap N)=f^{-1}(M)\cap f^{-1}(N)$.
5. Soit $x\in E$, alors
$$x\in f^{-1}(C_FM)\Leftrightarrow f(x)\in C_FM$$
$$\Leftrightarrow (f(x)\in F)\wedge(f(x)\notin M)$$
$$\Leftrightarrow (x\in E)\wedge(x\notin f^{-1}(M))$$
$$\Leftrightarrow x\in C_Ef^{-1}(M)$$
d'où $f^{-1}(C_FM)=C_Ef^{-1}(M)$.

2.3 Exercices

Exercice 1
Soit $E=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ un ensemble. Peut-on écrire :
$$(a)-\alpha\in E\qquad(b)-\alpha\subset E\qquad(c)-\{\alpha\}\subset E$$
$$(d)-\varnothing\subset E\qquad(e)-\varnothing\in E\qquad(f)-\{\varnothing\}\subset E$$

Solution
On peut écrire $(a)-\alpha\in E$ $(c)-\{\alpha\}\subset E$ $(d)-\varnothing\subset E$.
$(a)-\alpha\in E$ vraie, car α est un élément de l'ensemble E.
$(b)-\alpha\subset E$ n'a pas de sens puisque α n'est pas un ensemble.
$(c)-\{\alpha\}\subset E$ vraie, car $\{\alpha\}$ est un sous ensemble de E.
$(d)-\varnothing\subset E$ vraie, l'ensemble vide est inclu dans tous les ensembles.

$(e) - \varnothing \in E$, l'ensemble vide n'est pas un élément de E.
$(f) - \{\varnothing\} \subset E$ faux.

Exercice 2
Soient $A = \{0,1,2,3\}$ *et* $B = \{0,2,4,6\}$. *Décrire les ensembles* $A \cap B$, $A \cup B$ *et* $A \times B$.
Solution
Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$
1. $A \cap B$

$$A \cap B = \{x/x \in A \ et \ x \in B\}$$

$$= \{0,2\}$$

2. $A \cup B$

$$A \cup B = \{x/x \in A \ ou \ x \in B\}$$

$$= \{0,1,2,3,4,6\}$$

3. $A \times B$

$$A \times B = \{(x,y)/x \in A \ et \ y \in B\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} (0,0), (0,2), (0,4), (0,6), (1,0), (1,2), (1,4), (1,6), \\ (2,0), (2,2), (2,4), (2,6), (3,0), (3,2), (3,4), (3,6), \end{array} \right\}$$

Exercice 3
Soient A, B *et* C *trois parties d'un ensemble* E.
Montrer que :

$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$$

Solution
i- $(\Rightarrow)$ On suppose que $A \cap B = A \cap C$
Soit $x \in A \cap C_E^B$,
On a :

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Rightarrow x \notin A \cap C$$

$$x \in A \text{ et } x \notin A \cap C \Rightarrow x \notin C$$

$$\Rightarrow x \in C_E^C,$$

donc

$$x \in A \cap C_E^C$$

On a prouvé l'inclusion

$$A \cap C_E^B \subset A \cap C_E^C$$

En échangeant B et C, on obtient l'inclusion contraire, donc par double inclusion

$$A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$$

ii- ($\Leftarrow$) On suppose que $A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$, en utilisant l'implication précédente avec C_E^B et C_E^C.
Soit $x \in A \cap B$,
On a :

$$x \notin C_E^B \Rightarrow x \notin A \cap C_E^B$$

$$\Rightarrow x \notin A \cap C_E^C$$

$$x \in A \text{ et } A \cap C_E^C \Rightarrow x \notin C_E^C$$

$$\Rightarrow x \in C,$$

donc

$$x \in A \cap C$$

On a prouvé l'inclusion

$$A \cap B \subset A \cap C$$

En échangeant C_E^B et C_E^C, on obtient l'inclusion contraire, donc par double inclusion

$$A \cap B = A \cap C$$

Alors, d'aprés (i) et (ii), on déduit que

$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap C_E^B = A \cap C_E^C$$

Exercice 4
Soient A, B deux parties d'un ensemble E. On suppose que

$$A \cap B \neq \varnothing, A \cup B \neq E, A \nsubseteq B, B \nsubseteq A$$

On pose :

$$A_1 = A \cap B, A_2 = A \cap C_E^B, A_3 = B \cap C_E^A, A_4 = C_E^{A \cup B}.$$

Montrer que :
1. A_1, A_2, A_3, A_4 *sont non vides.*
2. A_1, A_2, A_3, A_4 *sont deux à deux disjoints.*
3. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E.$
Solution
1. A_1, A_2, A_3, A_4 *sont non vides. On a ;*

$$A_1 = A \cap B \neq \varnothing, \quad \textit{d'après l'énoncé.}$$

$$A_2 = A \cap C_E^B = A \setminus B \neq \varnothing, \qquad \textit{car} \;\; A \nsubseteq B.$$

$$A_3 = A \cap C_E^A = B \setminus A \neq \varnothing, \qquad \textit{car} \;\; B \nsubseteq A.$$

$$A_4 = C_E^{A\cup B} = E \setminus (A \cup B) \neq \varnothing, \qquad car \;\; A \cup B \neq E.$$

2. A_1, A_2, A_3, A_4 *sont deux à deux disjoints.*
On démontre que

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad avec \quad i \neq j \;\; et \;\; i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= (A \cap B) \cap \left(A \cap C_E^B\right) \\ &= A \cap B \cap A \cap C_E^B \\ &= (A \cap A) \cap \left(B \cap C_E^B\right) \\ &= A \cap \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_3 &= (A \cap B) \cap \left(B \cap C_E^A\right) \\ &= A \cap B \cap B \cap C_E^A \\ &= (B \cap B) \cap \left(A \cap C_E^A\right) \\ &= B \cap \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_4 &= (A \cap B) \cap \left(C_E^{A\cup B}\right) \\ &= (A \cap B) \cap \left(C_E^A \cap C_E^B\right) \\ &= A \cap B \cap C_E^A \cap C_E^B \\ &= \left(A \cap C_E^A\right) \cap \left(B \cap C_E^B\right) \\ &= \varnothing \cap \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 \cap A_3 &= \left(A \cap C_E^B\right) \cap \left(B \cap C_E^A\right) \\ &= A \cap C_E^B \cap B \cap C_E^A \\ &= \left(A \cap C_E^A\right) \cap \left(B \cap C_E^B\right) \\ &= \varnothing \cap \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

$$A_2 \cap A_4 = \left(A \cap C_E^B\right) \cap \left(C_E^{A\cup B}\right)$$

$$= \left(A \cap C_E^B\right) \cap \left(C_E^A \cap C_E^B\right)$$

$$= A \cap C_E^B \cap C_E^A \cap C_E^B$$

$$= \left(A \cap C_E^A\right) \cap \left(C_E^B \cap C_E^B\right)$$

$$= \varnothing \cap C_E^B$$

$$= \varnothing$$

$$A_3 \cap A_4 = \left(B \cap C_E^A\right) \cap \left(C_E^{A\cup B}\right)$$

$$= \left(B \cap C_E^A\right) \cap \left(C_E^A \cap C_E^B\right)$$

$$= B \cap C_E^A \cap C_E^A \cap C_E^B$$

$$= \left(B \cap C_E^B\right) \cap \left(C_E^A \cap C_E^A\right)$$

$$= \varnothing \cap C_E^A$$

$$= \varnothing$$

3. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E.$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = (A \cap B) \cup \left(A \cap C_E^B\right) \cup \left(B \cap C_E^A\right) \cup \left(C_E^{A\cup B}\right)$$

$$= (A \cap B) \cup \left(A \cap C_E^B\right) \cup \left(B \cap C_E^A\right) \cup \left(C_E^A \cap C_E^B\right)$$

$$= \left[(A \cap B) \cup \left(A \cap C_E^B\right)\right] \cup \left[\left(B \cap C_E^A\right) \cup \left(C_E^A \cap C_E^B\right)\right]$$

$$= \left[(A \cup A) \cap \left(A \cup C_E^B\right) \cap (B \cup A) \cap \left(B \cup C_E^B\right)\right] \\ \cup \left[\left(B \cup C_E^A\right) \cap \left(B \cup C_E^B\right) \cap \left(C_E^A \cup C_E^A\right) \cap \left(C_E^A \cup C_E^B\right)\right]$$

$$= \left[A \cap \left(A \cup C_E^B\right) \cap (B \cup A) \cap E\right] \cup \left[\left(B \cup C_E^A\right) \cap E \cap C_E^A \cap \left(C_E^A \cup C_E^B\right)\right]$$

$$= \left[A \cap \left(\left(A \cup C_E^B\right) \cap (B \cup A)\right)\right] \cup \left[C_E^A \cap \left(\left(B \cup C_E^A\right) \cap \left(C_E^A \cup C_E^B\right)\right)\right]$$

$$= \left[A \cap \left(A \cup \left(B \cap C_E^B\right)\right)\right] \cup \left[C_E^A \cap \left(C_E^A \cup \left(B \cup C_E^B\right)\right)\right]$$

$$= \left[A \cap (A \cup \varnothing)\right] \cup \left[C_E^A \cap \left(C_E^A \cup E\right)\right]$$

$$= A \cup C_E^A$$

$$= E$$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application définie par*

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. f *est-elle injective ? surjective ?*
2. Montre que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ *.*
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$*,* $g(x) = f(x)$ *est une bijection.*

Solution

1. f **est-elle injective ?**

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1}{1+x_1^2} = \frac{2x_2}{1+x_2^2}$$

$$\Rightarrow 2x_1\left(1+x_2^2\right) - 2x_2\left(1+x_1^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2) = 0.$$

Donc, on peut trouver deux éléments différents ont même image. Par exemple pour $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$,on a : $f(x_1) = f(x_2) = \frac{4}{5}$.
Alors, f n'est pas une application injective.

f **est-elle surjective ?**

Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche un élément x de $\mathbb{R}$ s'il existe tel que $y = f(x)$.
On a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$$

Cette équation admet des solutions pour $y \in [-1, 1]$. Donc pour $y \notin [-1, 1]$, l'élément y n'a pas d'antécédent.
Alors, f n'est pas une application surjective.

2. Montre que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ **.**

L'équation $y = f(x)$ a des solutions réelles si et seulement si $\Delta = 4\left(1 - y^2\right) \geq 0$, donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1]$.
Ainsi,

$$f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$$

3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$**,** $g(x) = f(x)$ **est une bijection.**

Soit $y \in [-1, 1]$, on cherche un élément unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$.
Si $y \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, alors les solutions possibles sont

$$x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$$

ou

$$x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$$

La deuxième solution n'appartient pas à $[-1, 1]$ (elle est strictement supérieure à 1 si $y > 0$, et strictement inférieure à -1 si $y < 0$).

D'autre part
$$x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$$
En effet,
$$1 \leq 1+\sqrt{1-y^2} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+\sqrt{1-y^2}} \leq 1$$
Donc,
$$-1 \leq -\frac{1}{1+\sqrt{1-y^2}} \leq y \leq \frac{1}{1+\sqrt{1-y^2}} \leq 1$$
Si $y=1$, l'équation $g(x)=1$ a pour unique solution $x=1$.
Si $y=-1$, l'équation $g(x)=-1$ a pour unique solution $x=1$.
Si $y=0$, l'équation $g(x)=0$ a pour unique solution $x=0$.
Dans tous les cas, on a prouvé que pour tout $y \in [-1,1]$, l'équation $g(x)=y$ admet une unique solution avec $x \in [-1,1]$. Nous avons bien prouvé que g est une bijection.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3x + 1.$$
et soit $A = [-2,1]$.
1. Déterminer l'image directe de A par f.
2. Déterminer l'image réciproque de A par f.

Solution

1. Déterminer l'image directe de A par f.

Par définition, on a
$$f(A) = \{f(x)/x \in A\}$$
On cherche toutes les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x parcourt $[-2,1]$.
On a
$$f(x) = \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4}$$
donc
$$x \in A \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$$
$$\Leftrightarrow -2+\tfrac{3}{2} \leq x+\tfrac{3}{2} \leq 1+\tfrac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow -\tfrac{1}{2} \leq x+\tfrac{3}{2} \leq \tfrac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 \leq \tfrac{25}{4}$$
$$\Leftrightarrow -\tfrac{5}{4} \leq \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4} \leq 5$$
Alors,
$$f(A) = \left[-\tfrac{5}{4}, 5\right]$$

2. Déterminer l'image réciproque de A par f.

Par définition, on a
$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in A\}$$

donc,

$$f\left(x\right) \in A \Leftrightarrow -2 \leq f\left(x\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{4} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 + \tfrac{5}{4} \leq \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 \leq 1 + \tfrac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\tfrac{3}{4} \leq \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 \leq \tfrac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\tfrac{3}{2} \leq x + \tfrac{3}{2} \leq \tfrac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 0$$

Alors,

$$f^{-1}\left(A\right) = [-3, 0]$$