جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
University of Science and Technology of Oran - Mohamed BOUDIAF
Faculty of Mechanical Engineering
Mechanical Engineering Department

Professor
Djilali
BOUTCHICHA

Représentation mathématique de MHS

Exercice 1

Dans un moteur, un piston oscille avec un mouvement harmonique simple de sorte que sa position varie selon l'expression $x = (5.00\ cm)\cos(2.00t + \pi/6)$, où x est en centimètres et t est en secondes. A $t = 0$, trouver :

a) la position du piston,
b) sa vitesse,
c) son accélération,
d) la période et l'amplitude du mouvement.

Solution :

a) la position du piston :
$x(t) = (5.00\ cm)\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ à $t = 0$, $x(t) = (5.00\ cm)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4.33\ cm$

b) la vitesse :
$v(t) = \frac{dx}{dt} = -(10.00\ cm/s)\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ à $t = 0$, $v(t) = -5.00\ cm/s$

c) l'accélération :
$a(t) = \frac{dv}{dt} = -(20.00\ cm/s^2)\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ à $t = 0$, $a(t) = -17.30\ cm/s^2$

d) la période et l'amplitude du mouvement :
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = 3.14\ s$ et $A = 5.00\ cm$

Exercice 2

La position d'une particule est donnée par l'expression
$x = (4.00\ m)\cos(3.00\pi t + \pi)$, où x est en mètres et t est en secondes.
Déterminer

a) la fréquence et la période du mouvement,
b) l'amplitude du mouvement,
c) la constante de phase,
d) la position de la particule à $t = 0{,}250\ s$.

Solution :

$x = (4.00\ m)\cos(3.00\pi t + \pi)$ en comparent ça avec $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

a) $\omega = 2\pi f = 3.00\pi$ $f = 1.50\ Hz$ $T = \frac{1}{f} = 0.667\ s.$
b) $A = 4.00\ m$
c) $\varphi = \pi\ rad$
d) $x(t = 0.250\ s) = (4.00\ m)\cos(1.75\pi) = 2.83\ m$

Exercice 3

a) Un ressort suspendu s'étire de 35,0 cm lorsqu'un objet de masse 450 g y est accroché au repos. Dans cette situation, nous définissons sa position comme $x = 0$. L'objet est abaissé de 18,0 cm supplémentaires et libéré du repos pour osciller sans friction. Quelle est sa position x à un instant 84,4 s plus tard ?

b) Et si? Un ressort suspendu s'étire de 35,5 cm lorsqu'un objet de masse 440 g y est accroché au repos. Nous définissons cette nouvelle position comme $x = 0$. Cet objet est également abaissé de 18,0 cm supplémentaires et libéré du repos pour osciller sans friction. Trouvez sa position 84,4 s plus tard.

c) Trouvez la distance parcourue par l'objet vibrant dans la partie (a).

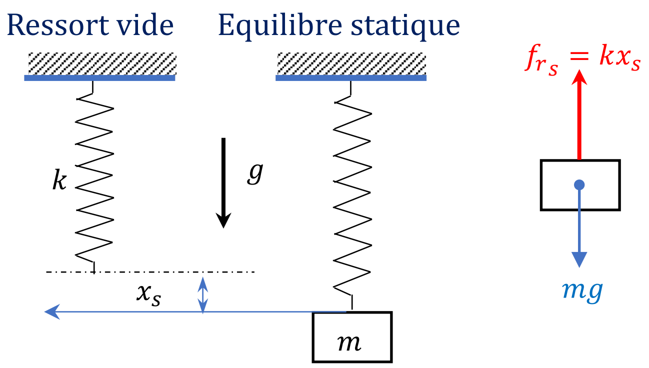
d) Trouvez la distance parcourue par l'objet vibrant dans la partie (b).

e) Pourquoi les réponses aux questions (c) et (d) diffèrent-elles d'un si grand pourcentage alors que les données sont si similaires ? Cette circonstance révèle-t-elle une difficulté fondamentale dans le calcul de l'avenir ?

solution :

a) La position 1

La constante de rappel du ressort



$$f_{r_s} = k\, x_s$$

$$k = f_{r_s} / x_s$$

$$k = \frac{0.45\ kg \times 9.8\ m/s^2}{0.35\ m} = 12.6\ N/m$$

La pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12.6\ N/m}{0.45\ kg}} = 5{,}2915\ rad/s$$

On prend l'axe des x pointant vers le bas, donc $\varphi = 0$

L'équation de mouvement est donc $x = (18.00\ cm)\cos(5{,}292t)$

$$x = (18.00\ cm)\cos(5{,}292 \times 84.4\ \mathrm{s}) = 15{,}83\ cm$$

b) La position 2

$$k = \frac{0.44\ kg \times 9.8\ m/s^2}{0.355\ m} = 12.15\ N/m$$

La pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12.15\ N/m}{0.44\ kg}} = 5{,}25\ rad/s$$

On prend l'axe des x pointant vers le bas, donc $\varphi = 0$
L'équation de mouvement est donc $x = (18.00\ cm)\cos(5{,}25t)$

$$x = (18.00\ cm)\cos(5{,}25 \times 84.4\ \text{s}) = -15{,}95\ cm$$

c) La distance parcourue par l'objet vibrant dans la partie (a).

Calcul de la période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{T} = 2\pi\sqrt{\frac{0.45\ kg}{12.6\ N/m}} = 1{,}187\ s$$

Le nombre de périodes en 84,4 s est $\frac{84{,}4}{2\pi}\sqrt{\frac{12{,}6\ N/m}{0{,}45\ kg}} = 71{,}079$ périodes

L'amplitude $A = 18\ cm$, un cycle est effectué en $4A = 72\ cm$

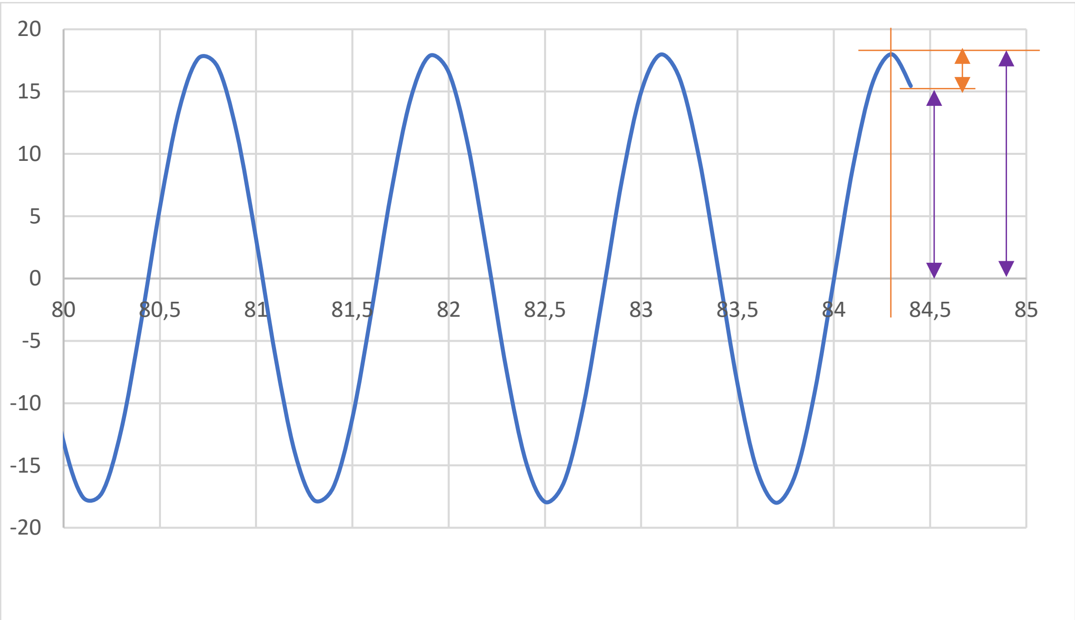
La distance parcourue est $71{,}0 \times 72\ cm = 5\,112\ cm$ à la position de départ c-à-d à $x_{71} = 18\ cm$

Le temps restant $t_s = 0{,}079 \times 1{,}187 = 0{,}094\ s$

$x = (18.00\ cm)\cos(5{,}292 \times 0{,}094\ \text{s}) = 15{,}82\ cm$

Pour aller de x_{72} à $x(84{,}4)$ l'objet parcourt $(18 - 15{,}82)\ cm$

La distance totale parcourue est $d = 71{,}0 \times 72 + (18 - 15{,}82) = 5114{,}2\ cm$



d) La distance parcourue par l'objet dans la partie (b).

Calcul de la période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.44\ kg}{12.15\ N/m}} = 1{,}1957\ s$$

Le nombre de périodes en 84,4 s est $\frac{84{,}4}{2\pi}\sqrt{\frac{12{,}15\ N/m}{0{,}44\ kg}} = 70{,}587$ périodes

L'amplitude $A = 18\ cm$, un cycle est effectué en $4A = 72\ cm$

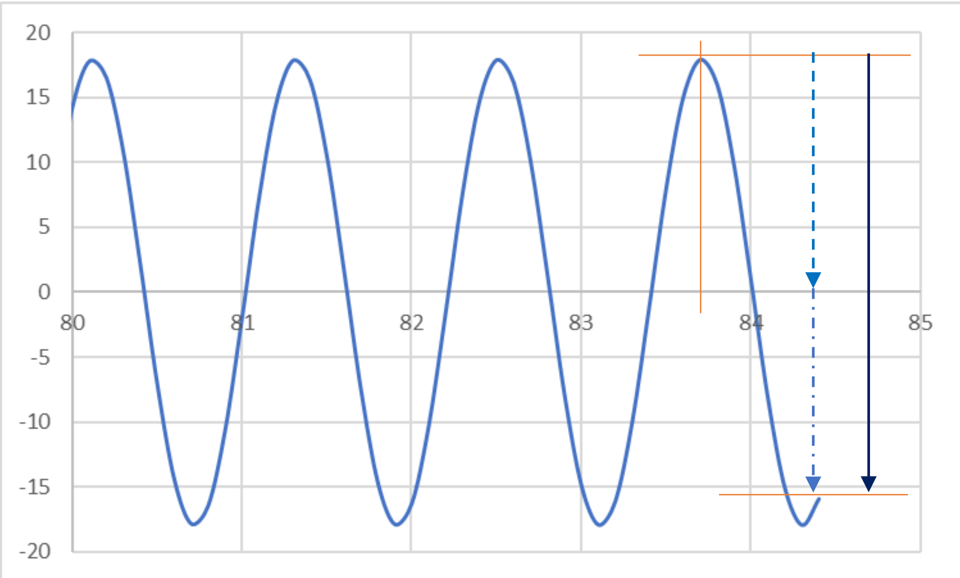
La distance parcourue est $70{,}0 \times 72\ cm = 5\ 040\ cm$ à la position de départ c-à-d à $x_{70} = 18\ cm$

Le temps restant $t_s = 0{,}587 \times 1{,}1957 = 0{,}702\ s$

$x(84{,}4s) = -15{,}95\ cm$

Pour aller de x_{70} à $x(84{,}4)$ l'objet parcourt $(18 + 15{,}95)\ cm$

$d = 70{,}0 \times 72 + (18 + 15{,}95) = 5074\ cm$



e) Les différences entre les réponses aux questions (c) et (d).

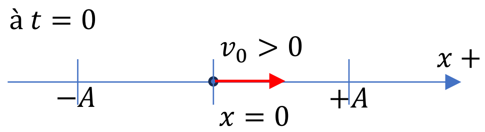
Les réponses aux questions (c) et (d) ne sont pas très différentes étant donné la différence dans les données sur les deux systèmes vibrants. Mais lorsque nous nous interrogeons sur les détails de l'avenir, l'imprécision de nos connaissances sur le présent rend impossible toute prévision précise. Les deux oscillations démarrent en phase mais se déphasent complètement

Exercice 4

Une particule se déplaçant le long de l'axe des x dans un mouvement harmonique simple part de sa position d'équilibre, l'origine, à $t = 0$ et se déplace vers la droite. L'amplitude de son mouvement est de 2,00 cm et la fréquence est de 1,50 Hz.

a) Montrer que la position de la particule est donnée par $x = (2.00\ m)\sin(3.00\pi t)$
b) Déterminer la vitesse maximale et le moment le plus précoce (t > 0) auquel la particule a cette vitesse,
c) Déterminer l'accélération maximale et le moment le plus précoce (t > 0) auquel la particule a cette accélération,
d) Déterminez la distance totale parcourue entre $t = 0$ et $t = 1,00\ s$.

Solution :



a) Equation de la position
$A\ t = 0\ , x = 0$ et v est positive (vers la droite).
$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$x(0) = A\cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \cos\varphi = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \varphi = +\dfrac{\pi}{2} \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$v(t) = -A\sin(\omega t + \varphi)$
Choix de la phase qui correspond à la vitesse positive

$$v(0) = -A\sin(\varphi) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin(\varphi) < 0 \begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{2} = +1 \\ \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases} \Longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A\left[\cos\omega t\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin\omega t\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = A\sin\omega t$$

donc
$x(t) = A\sin\omega t$ et $v = A\cos\omega t$
Comme $A = 2cm$ et $f = 1.50\ Hz$; $\omega = 2\pi f = 3\pi\ rad/s$;
$x(t) = (2.00\ cm)\sin 3.00\pi t$

b) La vitesse maximale

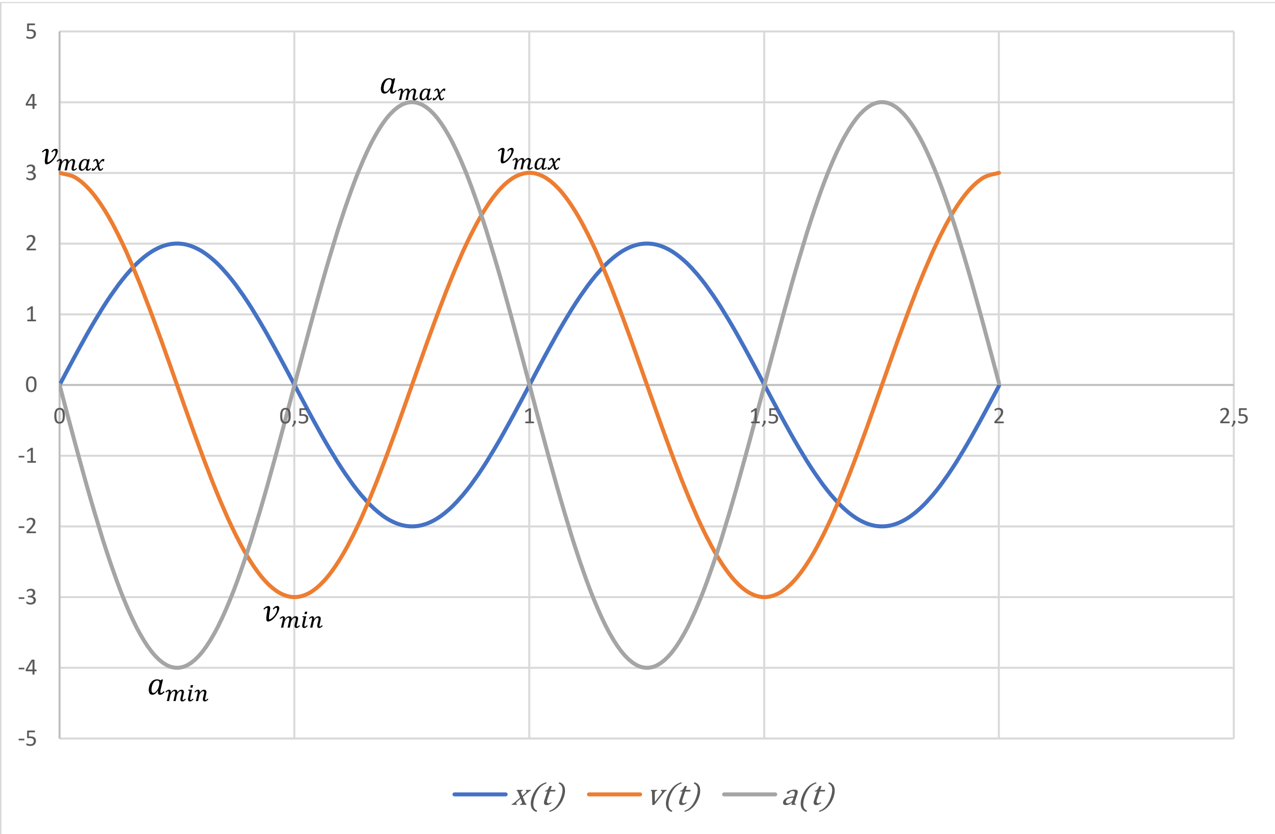
$v_{max} = v_0 = \omega A = 3.00\pi \times 2.00 = 6.00\pi\ cm/s = 18.8\ cm/s$
$v = 6.00\pi\cos 3.00\pi t$
La particule possède cette vitesse à :

$$\cos 3.00\pi t = 1 \quad \Longrightarrow \quad 3.00\pi t = 2n\pi \quad n = 0,1,2 \Longrightarrow \quad t = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}\ s \quad pour\ n = 1$$

$t = 0$ et en suite à $t = T = \dfrac{2}{3}s$

c) L'accélération maximale
$a_{max} = \omega^2 A = (3.00\pi)^2 \times 2.00 = 18.0\pi^2 cm/s^2 = 178\ cm/s^2$
Cette valeur positive d'accélération se produit pour la première fois à $t = \frac{3T}{4} = 0.50\ s$
Puisque $T = \frac{2}{3}\ s$ et $A = 2.00\ cm$, la particule parcourra 8.00 cm en ce temps.

Par conséquent, en $1\ s(=\frac{3}{2}T)$, la particule parcourra $8.00\ cm + 4.00\ cm$



Exercice 5

Un piston dans un moteur à essence est en mouvement harmonique simple. Si les extrêmes de sa position par rapport à son point central sont $\mp 5{,}00\ cm$, trouvez la vitesse et l'accélération maximales du piston lorsque le moteur tourne à la vitesse de $3\ 600\ tr/min$.

Solution :

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\quad A = 0.05\ m$ $\quad v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$ $\quad a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$

Si $f = 3600\ tr/min = 60\ Hz$ alors $\omega = 120\pi\ \text{rad/s}$

$v_{max} = 0.05(120\pi)\quad m/s$ $\qquad a = 0.05(120\pi)^2\quad m/s^2 = 7.11 \times 10^3\quad m/s^2$

Exercice 6

Un objet de 0,500 kg attaché à un ressort avec une constante de raideur de 8,00 N/m vibre selon un mouvement harmonique simple avec une amplitude de 10,0 cm.
Calculer :

a) la valeur maximale de sa vitesse et de son accélération,
b) la vitesse et l'accélération lorsque l'objet est à 6,00 cm de la position d'équilibre,
c) l'intervalle de temps nécessaire pour que l'objet se déplace de $x = 0$ à $x = 8{,}00\ cm$.

Solution :

a) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8.0\ N/m}{0.500\ kg}} = 4.00\ rad/s$ La position est donc donnée par $x = 10.0\ \sin(4.00t)$ cm.

À partir de là, nous trouvons que $v = 40.0\ \cos(4.00t)$ cm/s $\quad v_{max} = 40.0\ cm/s.$
$a = -160.0\ \sin(4.00t)\ \text{cm}/s^2 \quad a_{max} = 160.0\ cm/s^2.$

b) $t = \left(\frac{1}{4.00}\right)\sin^{-1}\left(\frac{x}{10.0}\right)$ et quand $x = 6.00\ cm,\quad t = 0.161\ s$

Nous trouvons que $v = 40.0\ \cos(4.00 \times 0.161) = 32.0$ cm/s
$a = -160.0\ \sin(4.00 \times 0.161) = -96\ \text{cm}/s^2$

c) En utilisant $t = \left(\frac{1}{4.00}\right)\sin^{-1}\left(\frac{x}{10.0}\right)$

quand $x = 0, t = 0$ et quand $x = 8.00\ cm, t = 0.232\ s.$

Donc, $\Delta t = 0.232\ s.$

Exercice 7

Un planeur de 1,00 kg attaché à un ressort avec une constante de force de 25,0 N/m oscille sur une piste d'air horizontale sans frottement. À $t = 0$, le planeur est libéré du repos à $x = -3{,}00\ cm$. (C'est-à-dire que le ressort est comprimé de 3,00 cm.) Trouver

a) la période de son mouvement,
b) les valeurs maximales de sa vitesse et de son accélération,
c) la position, la vitesse et l'accélération en fonction du temps.

Solution :

$m = 1.00\ kg, k = 25.0\ N/m,$ et $A = 3.00\ cm.$ à $t = 0,$ $x = -3.00\ cm$

a) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25.0}{1.0}} = 5.00\ \ rad/s$

de sorte que $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{5.00} = 1.26\ s$

b) $v_{max} = A\omega = 3.00 \times 10^{-2}\ m(5.00\ rad/s)\ = 0.150\ m/s$

$a_{max} = A\omega^2 = 3.00 \times 10^{-2}\ m(5.00\ rad/s)^2\ = 0.750\ m/s^2$

c) Parce que $x = -3.00\ cm$ et $v = 0$ à $t = 0,$ la solution requise $x = -A\cos\omega t$

ou $x = -3.00\cos(5.00t)\ \ cm$

$$v = \frac{dx}{dt} = 15.00\sin(5.00t)\ \ cm/s$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 75.00\cos(5.00t)\ \ cm/s^2.$$

Exercice 8

Un objet de 1,00 kg est attaché à un ressort horizontal. Le ressort est initialement étiré de $0{,}100\ m$ et l'objet y est libéré du repos. Il se déplace sans friction. La prochaine fois que la vitesse de l'objet sera nulle, c'est $0{,}500\ s$ plus tard. Quelle est la vitesse maximale de l'objet ?

Solution

Une demi seconde $(0{,}500\ s)$ doivent s'écouler entre une extrémité et l'autre. La période est donc de 1,00 s.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 6{,}28\ rad/s.$$

et $$v_{max} = \omega A = (6{,}28\ rad/s)(0{,}100\ m) = 0{,}628\ m/s\,.$$

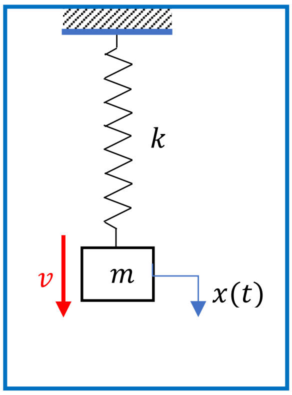
Exercice 9

Une particule suspendue à un ressort oscille avec une pulsation ω. Le ressort est suspendu au plafond d'une cabine d'ascenseur et reste immobile (par rapport à la cabine d'ascenseur) lorsque la cabine descend à une vitesse constante v. La cabine s'arrête alors brusquement.

1. Avec quelle amplitude la particule oscille-t-elle ?
2. Quelle est l'équation du mouvement de la particule ? (Choisissez la direction ascendante pour être positive.)

Solution :

A l'instant d'arrêt de la cabine qui est l'instant initial la masse est en position d'équilibre statique $(x_0 = 0)$ et la particule possède une vitesse $(v_0 = v)$.
L'équation de mouvement $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$



$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \end{cases}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2} = \sqrt{\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + 0} = \frac{v}{\omega}$$

$$x_0 = A\cos\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$v_0 = -\omega A\sin\varphi = v > 0 \Longrightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = \left(\frac{v}{\omega}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\omega\, t\cos\frac{\pi}{2} - \left(\frac{v}{\omega}\right)\sin\omega t\sin\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = -\left(\frac{v}{\omega}\right)\sin\omega t$$