جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
University of Science and Technology of Oran - Mohamed BOUDIAF
Faculty of Mechanical Engineering
Mechanical Engineering Department
Professor Djilali BOUTCHICHA

Pendules

Ex1.

Un homme entre dans une haute tour et a besoin de connaître sa hauteur. Il note qu'un long pendule s'étend du plafond presque jusqu'au sol et que sa période est de 12,0 s.
(a) Quelle est la hauteur de la tour ?
(b) Et si ? Si ce pendule est emmené sur la Lune, où l'accélération de la chute libre est de $1{,}67\ m/s^2$, quelle est sa période là-bas ?

Solution :

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{(9{,}80\ m/s^2)(12{,}0\ s)^2}{4\pi^2} = 35{,}7\ m$$

b) $T_{lune} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{lune}}} = 2\pi\sqrt{\frac{35{,}7\ m}{1{,}67\ m/s^2}} = 29{,}1\ s$

Ex2.

Un pendule physique sous la forme d'un corps plan se déplace selon un simple mouvement harmonique avec une fréquence de 0,450 Hz.

Si le pendule a une masse de 2,20 kg et que le pivot est situé à $0{,}350\ m$ du centre de masse, déterminez le moment d'inertie du pendule par rapport au point de pivotement.

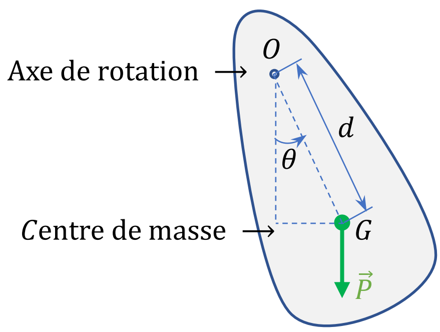
Solution :

$f = 0{,}450\ Hz,\ d = 0{,}350\ m,$ et $m = 2{,}20\ kg$

$T = \frac{1}{f}$;

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$; $T^2 = \frac{4\pi^2 I}{mgd}$

$$I = T^2\frac{mgd}{4\pi^2} = \left(\frac{1}{f}\right)^2\frac{mgd}{4\pi^2} = \frac{2{,}20 \times 9{,}8 \times 0{,}350}{4\pi^2(0{,}450\ s^{-1})^2} = 0{,}944\ kg \cdot m^2$$



Ex3.

Un « pendule des secondes » est un pendule qui passe par sa position d'équilibre une fois par seconde. (La période du pendule est précisément de $2\ s$.) La longueur d'un pendule des secondes est de $0{,}9927\ m$ à Tokyo, au Japon et de $0{,}9942\ m$ à Cambridge, en Angleterre. Quel est le rapport des accélérations en chute libre à ces deux endroits ?

Solution :

La période à Tokyo est $T_T = 2\pi\sqrt{\frac{L_T}{g_T}}$

et la période à Cambridge est $T_C = 2\pi\sqrt{\frac{L_C}{g_C}}$

On sait que $T_T = T_C = 2{,}00\ s$

ou $\frac{g_C}{g_T} = \frac{L_C}{L_T} = \frac{0{,}9942}{0{,}9927} = 1{,}0015$

Ex4.

La position angulaire d'un pendule est représentée par l'équation . $\theta = (0.320\ rad)\cos\omega t$ parce que, où . est en radians et $\omega = 4.43\ rad/s$. Déterminer la période et la longueur du pendule.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}: \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4.43} = \boxed{1.42\ \text{s}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}: \qquad L = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9.80}{(4.43)^2} = \boxed{0.499\ \text{m}}$$

Professor
Djilali
BOUTCHICHA

Ex5.

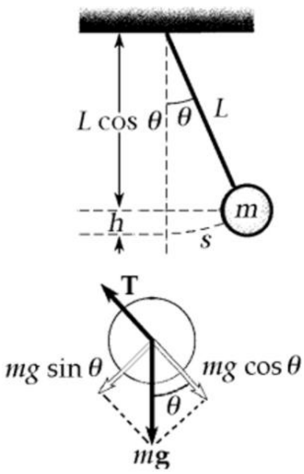
Un pendule simple a une masse de $0{,}250\ kg$ et une longueur de $1{,}00\ m$. Il est déplacé d'un angle de 15,0° puis relâché. Quels sont
(a) la vitesse maximale,
(b) l’accélération angulaire maximale et
(c) la force de rappel maximale ?
Et si? Résolvez ce problème en utilisant le modèle de mouvement harmonique simple pour le mouvement du pendule, puis résolvez le problème plus précisément en utilisant des principes plus généraux.

Solution :

En utilisant le modèle de mouvement harmonique simple :

$$A = r\theta = 1\ \text{m}\ 15° \frac{\pi}{180°} = 0.262\ \text{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9.8\ \text{m/s}^2}{1\ \text{m}}} = 3.13\ \text{rad/s}$$



(a) $v_{\max} = A\omega = 0.262\ \text{m}\ 3.13/\text{s} = \boxed{0.820\ \text{m/s}}$

(b) $a_{\max} = A\omega^2 = 0.262\ \text{m}(3.13/\text{s})^2 = 2.57\ \text{m/s}^2$

$a_{\tan} = r\alpha \qquad \alpha = \frac{a_{\tan}}{r} = \frac{2.57\ \text{m/s}^2}{1\ \text{m}} = \boxed{2.57\ \text{rad/s}^2}$

(c) $F = ma = 0.25\ \text{kg}\ 2.57\ \text{m/s}^2 = \boxed{0.641\ \text{N}}$

Plus précisément :

(a) $mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{and} \qquad h = L(1-\cos\theta)$

$\therefore v_{\max} = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)} = \boxed{0.817\ \text{m/s}}$

(b) $I\alpha = mgL\sin\theta$

$\alpha_{\max} = \frac{mgL\sin\theta}{mL^2} = \frac{g}{L}\sin\theta_i = \boxed{2.54\ \text{rad/s}^2}$

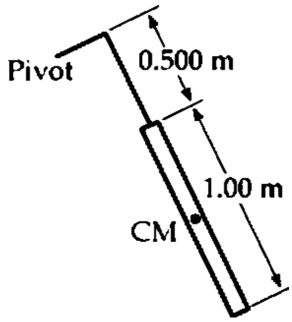
(c) $F_{\max} = mg\sin\theta_i = 0.250(9.80)(\sin 15.0°) = \boxed{0.634\ \text{N}}$

Ex6.

Une tige rigide très légère d'une longueur de 0,500 m s'étend tout droit d'une extrémité d'un mètre. Le bâton est suspendu à un pivot à l'extrémité de la tige et est mis en oscillation.
(a) Déterminez la période d'oscillation.
Suggestion : Utilisez le théorème des axes parallèles.
(b) De quel pourcentage la période diffère-t-elle de la période d'un pendule simple de 1,00 m de long ?

Solution :

(a) Théorème des axes parallèles :



$$I = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Md^2 = \frac{1}{12}M(1.00\text{ m})^2 + M(1.00\text{ m})^2$$
$$= M\left(\frac{13}{12}\text{ m}^2\right)$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{M(13\text{ m}^2)}{12Mg(1.00\text{ m})}} = 2\pi\sqrt{\frac{13\text{ m}}{12(9.80\text{ m/s}^2)}} = \boxed{2.09\text{ s}}$$

(b) Pour le pendule simple

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1.00\text{ m}}{9.80\text{ m/s}^2}} = 2.01\text{ s} \qquad \text{difference} = \frac{2.09\text{ s} - 2.01\text{ s}}{2.01\text{ s}} = \boxed{4.08\%}$$

Ex7.

Un pendule de torsion est formé en prenant un mètre de masse 2,00 kg et en attachant en son centre un fil. Avec son extrémité supérieure serrée, le fil vertical soutient le bâton lorsque celui-ci tourne dans un plan horizontal. Si la période résultante est de 3,00 minutes, quelle est la constante de torsion du fil ?

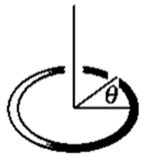
$$I = \frac{1}{12}mL^2 = \frac{1}{12}(2.00\text{ kg})(1.00\text{ m})^2 = 0.167\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$
$$\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{4\pi^2(0.167\text{ kg}\cdot\text{m}^2)}{(180\text{ s})^2} = \boxed{203\ \mu\text{N}\cdot\text{m}}$$

جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
University of Science and Technology of Oran - Mohamed BOUDIAF
Faculty of Mechanical Engineering
Mechanical Engineering Department

Professor
Djilali
BOUTCHICHA

Ex8.

Un balancier d'horlogerie a une période d'oscillation de 0,250 s. La roue est construite de manière à ce que sa masse de 20,0 g soit concentrée autour d'une jante de rayon 0,500 cm. Quels sont (a) le moment d'inertie de la roue et (b) la constante de torsion du ressort fixé ?



$T = 0.250\text{ s},\ I = mr^2 = \left(20.0\times10^{-3}\text{ kg}\right)\left(5.00\times10^{-3}\text{ m}\right)^2$

(a) $I = \boxed{5.00\times10^{-7}\text{ kg}\cdot\text{m}^2}$

(b) $I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta;\ \sqrt{\dfrac{\kappa}{I}} = \omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$\kappa = I\omega^2 = \left(5.00\times10^{-7}\right)\left(\frac{2\pi}{0.250}\right)^2 = \boxed{3.16\times10^{-4}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}}$$