Exercice1 :

1. Soit $*$ la loi de composition interne définie dans $\mathbb{Q}$ par $x * y = \dfrac{x+y}{2}$, montrer que $*$ n'est pas associative
2. Soit T la loi de composition interne définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $xTy = xy + (x^2-1)(y^2-1)$, montrer que T n'est pas associative
3. T admet-elle un élément neutre ?

Exercice2 :

1. Montrer que $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$.
2. Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 1\}$, K est-il un sous groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$.

Exercice 3 : On considère les permutations suivantes :

id$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\sigma_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; ; $\sigma_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_3$; $\sigma_1 \circ \sigma_1$; $\sigma_1 \circ \sigma_2$; $\sigma_3 \circ \sigma_2$

Exercice 4 : Montrer que les applications suivantes sont des homomorphismes de groupes ?

1- $\begin{array}{cccc} exp & : & (\mathbb{R}, +) & \to & (\mathbb{R}_+^*, \times) \\ & & x & \mapsto & expx \end{array}$ 2- $\begin{array}{cccc} f & : & (\mathbb{C}, +) & \to & (\mathbb{C}^*, \times) \\ & & x & \mapsto & f(x) = cosx + i \sin x \end{array}$

Exercice5 : Soit $*$ la loi de composition définie sur $\mathbb{R} - \{\dfrac{-1}{3}\}$ par :

$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{\dfrac{-1}{3}\},\ x * y = x + y + 3xy$

1. Montrer que $(\mathbb{R} - \{\dfrac{-1}{3}\}, *)$ est un groupe commutatif.
2. Soit H le sous ensemble de $\mathbb{R} - \{\dfrac{-1}{3}\}$ défini par $H = [0, +\infty[$.

   (H,*) est -il un sous groupe de $(\mathbb{R} - \{\dfrac{-1}{3}\}, *)$? justifier votre réponse.
3. Soit f l'application définie par :

   $$\begin{array}{ccccc} f & : & (\mathbb{R}^*, \times) & \to & (\mathbb{R} - \{\dfrac{-1}{3}\}, *) \\ & & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3} \end{array}$$

   f est elle un morphisme de groupes ?Justifier votre réponse .

Exercice 6 : Soit $A = \{\frac{m}{n} / m \in \mathbb{Z}, n\, entier\, naturel\, impair,\; n = 2k+1\}$ (c'est-à-dire que A est l'ensemble des rationnels à dénominateur impair).
Démontrer que $(A, +, \times)$ est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles ?

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il un corps ?

Exercice 7 : On munit A=$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de eux lois de composition interne :
$1 - (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ 2- $(x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + yx')$

1. Montrer que A muni de ces deux lois est un anneau commutatif unitaire.
2. Soit X=$\{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$; montrer que X est un sous anneau et que l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe le couple (x,0) de X est un homomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ sur l'anneau X.

Exercice 8 :

1. Montrer que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ admet des diviseurs de zéro.$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est -il un corps ?
2. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est -il un anneau intègre ?
3. Montrer que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un corps.
4. Déterminer l'ensemble de tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.