Corrigé de fiche TD 2 (ALG I)

INF-L1 (2023-2024)

Exercice 1

1. On peut écrire

$$(a) - a \in E \qquad (c) - \{a\} \subset E \qquad (e) - \varnothing \subset E.$$

$(a) - a \in E$ vraie, car a est un élément de l'ensemble E.
$(b) - a \subset E$ n'a pas de sens puisque a n'est pas un ensemble.
$(c) - \{a\} \subset E$ vraie, car $\{a\}$ est un sous ensemble de E.
$(d) - \varnothing \in E$,n'a pas de sens puisque l'ensemble vide n'est pas un élément de E.
$(e) - \varnothing \subset E$ vraie, l'ensemble vide est inclu dans tous les ensembles.
$(f) - \{\varnothing\} \subset E$ n'a pas de sens puisque l'ensemble vide n'est pas un élément de E.

2. Décrire les ensembles $A \cap B, A \cup B, A \times B, B \times A, A \cap C, (A \times B) \cap (B \times A)$, et $P(A)$

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{2, 3\}, \qquad C = \{3, 6, 9\}$$

- $A \cap B$: Par définition, on a

$$A \cap B = \{x / \ x \in A \quad et \quad x \in B\} = \{2\}.$$

- $A \cup B$: Par définition, on a

$$A \cup B = \{x / \ x \in A \quad ou \quad x \in B\} = \{1, 2, 3\}.$$

- $A \times B$: Par définition, on a

$$A \times B = \{(x, y) / \ \ x \in A \quad et \quad y \in B\}$$
$$= \{ \ (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3) \ \}.$$

- $B \times A$

$$B \times A = \{(x, y) / \ \ x \in B \quad et \quad y \in A\}$$
$$= \{ \ (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2) \ \}.$$

- $A \cap C$

$$A \cap C = \{x / \ \ x \in A \quad et \quad x \in C\} = \varnothing.$$

- $(A \times B) \cap (B \times A)$

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(a,b) \,/\, (a,b) \in A \times B \quad \text{et} \quad (a,b) \in B \times A\}$$

$$= \{(2,2)\}.$$

- $P(A)$

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

Exercice 2

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E: Montrer que:

- $C_E^{A\cap B} = C_E^A \cup C_E^B$

  Soit $x \in C_E(A \cap B)$.

$$x \in C_E(A \cap B) \Rightarrow (x \in E \ et \ x \notin A \cap B)$$

$$\Rightarrow (x \in E\ ) \ et \ (x \notin A \ ou \ x \notin B)$$

$$\Rightarrow (x \in E \ et \ x \notin A) \ ou \ (x \in E \ et \ x \notin B)$$

$$\Rightarrow (x \in C_E A) \ ou \ (x \in C_E B)$$

$$\Rightarrow x \in C_E A \cup C_E B,$$

  d'où l'inclusion

$$C_E(A \cap B) \subset C_E A \cup C_E B.$$

Réciproquement, Soit $x \in C_E A \cup C_E B$.
Si $x \in C_E A$, alors $x \notin A$ donc $x \notin A \cap B$, et par suite $x \in C_E(A \cap B)$.
De même si $x \in C_E B$, alors $x \notin B$ donc $x \notin A \cap B$, et par suite $x \in C_E(A \cap B)$.
Dans les deux cas

$$x \in C_E(A \cap B).$$

D'où l'inclusion

$$C_E A \cup C_E B \subset C_E(A \cap B).$$

La première égalité est donc démontrée.

- $C_E^{A\cup B} = C_E^A \cap C_E^B$

  Pour la deuxième égalité, en posant $A_1 = C_E A$, $B_1 = C_E B$ et en utilisant $C_E(C_E A) = A$. Donc

$$C_E^{A_1} \cup C_E^{B_1} = C_E^{A_1 \cap B_1} \Leftrightarrow A \cup B = C_E^{A_1 \cap B_1}$$

$$\Leftrightarrow C_E^{A\cup B} = A_1 \cap B_1$$

$$\Leftrightarrow C_E^{A\cup B} = C_E A \cap C_E B$$

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
  Soit $x \in A \cap (B \cup C)$

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$$

$$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

  D'où $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$
  ($\Rightarrow$) Supposons que $A \cap B = A \cup B$.
  Soit $x \in A$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \quad (\text{ car } A \cap B = A \cup B)$$

$$\Rightarrow \ x \in B$$

  d'où

$$A \subset B$$

  Soit $x \in B$

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \quad (\text{ car } A \cap B = A \cup B)$$

$$\Rightarrow \ x \in A$$

  d'où

$$B \subset A$$

  ($\Leftarrow$) Supposons que $A = B$.
  Donc

$$A \cap B = A = B = A \cup B$$

- $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$
  ($\Rightarrow$) Supposons que $A \cup B = A \cap C$
  Soit $x \in B$

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\Rightarrow x \in A \cap C \quad (\text{ car } A \cup B = A \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in A$$

d'où

$$B \subset A$$

Soit $x \in A$

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$$

$$\Rightarrow x \in A \cap C \quad (\text{ car } A \cup B = A \cap C)$$

$$\Rightarrow x \in C$$

d'où

$$A \subset C$$

($\Leftarrow$) Supposons que $B \subset A \subset C$
Donc

$$A \cup B = A = A \cap C$$

- $\underbrace{A \subset B}_{(1)} \Leftrightarrow \underbrace{C_E^B \subset C_E^A}_{(2)} \Leftrightarrow \underbrace{A \cup B = B}_{(3)} \Leftrightarrow \underbrace{A \cap B = A}_{(4)}$

(1)$\Leftrightarrow$(2)

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a, a \in A \Rightarrow a \in B$$

$$\Leftrightarrow \forall a, a \notin B \Rightarrow a \notin A$$

$$\Leftrightarrow \forall a, a \in C_E B \Rightarrow a \in C_E A$$

$$\Leftrightarrow C_E B \subset C_E A$$

(1)$\Leftrightarrow$(3)

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$$

(1)$\Leftrightarrow$(4)

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$$

On peut montrer que

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$$

$$et$$

$$(4) \Rightarrow (1)$$

- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
  Soit $(x, y) \in (A \cup B) \times C$.

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \cup B) \times C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B \ et \ y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B \ ) \ et \ (y \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \ et \ y \in C) \ ou \ (x \in B \ et \ y \in C) \\
&\Leftrightarrow (\ (x, y) \in A \times C) \ ou \ (\ (x, y) \in B \times C) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C),
\end{aligned}$$

  d'où

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

Exercice 3

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications définies par

$$f(x) = 2x + 3 \qquad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 5$$

A-t-on: $f \circ g = g \circ f$

- $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$(f \circ g\ )(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2x^2 - 7$$

- $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$(g \circ f\ )(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 5 = 4x^2 + 12x + 4.$$

Pour $x = 0$, on a

$$(f \circ g\ )(0) = -7 \quad \text{et} \quad (g \circ f\ )(0) = 4,$$

donc, $\exists x = 0 \in \mathbb{R}$ tel que $(f \circ g\ )(0) \neq (g \circ f\ )(0)$, alors $f \circ g \neq g \circ f$.

Exercice 4

Les applications suivantes sont-elles surjectives? injectives? bijectives?

1. $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ avec $f_1(n) = n(n+1)$

Surjective?

Soit $y \in \mathbb{N}$, on cherche un élément x de $\mathbb{N}$ s'il existe tel que $y = f_1(x)$.
On a:

$$y = f_1(x) \Leftrightarrow y = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + x - y = 0$$

On a

$$\Delta = 1 + 4y > 0$$

Pour $y = 1$. L'équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4y}}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2} \notin \mathbb{N}$$

Donc, l'élément $y = 1$ n'a pas d'antécédent.
Alors, f_1 n'est pas une application surjective.

Injective?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$

$$f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow x_1(x_1+1) = x_2(x_2+1)$$

$$\Rightarrow \left(x_1^2 - x_2^2\right) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 1) = 0.$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad (\text{ car } x_1 + x_2 + 1 \neq 0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Alors, f_1 est une application injective.

Bijective?

Comme l'application f_1 n'est pas surjective, alors f_1 n'est pas bijective.

2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f_2(x) = x^2 + 2x + 3$

Surjective?

Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche un élément x de $\mathbb{R}$ s'il existe tel que $y = f_2(x)$.
On a:

$$y = f_2(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x - y + 3 = 0$$

On a

$$\Delta = 4y - 8$$

Cette équation n'admet pas des solutions pour $y \in \left]-\infty, -2\right[$. Donc l'élément y n'a pas d'antécédent. Alors, f_2 n'est pas une application surjective.

Injective?
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 + 3 = x_2^2 + 2x_2 + 3$$

$$\Rightarrow \left(x_1^2 - x_2^2\right) + 2(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0.$$

Donc, on peut trouver deux éléments différents ont même image. Par exemple pour $x_1 = 0$ et $x_2 = -2$,on a: $f_2(x_1) = f_2(x_2) = 3$.
Alors, f_2 n'est pas une application injective.
Bijective?
Comme l'application f n'est pas injective et n'est pas surjective, alors f n'est pas bijective.
3. $f_3 :]1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ avec $f_3(x) = \ln(x)$
Surjective?
Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$, on cherche un élément x de $]1, +\infty[$ s'il existe tel que $y = f_3(x)$.
On a:

$$y = f_3(x) \Leftrightarrow y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y \in]1, +\infty[.$$

Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe au moins un réel $x \in]1, +\infty[$ tel que $y = f_3(x)$.
D'où l'application f_3 est surjective.
Injective?
Soient $x_1, x_2 \in]1, +\infty[$

$$f_3(x_1) = f_3(x_2) \Rightarrow \ln(x_1) = \ln(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Alors, pour tout $x_1, x_2 \in]1, +\infty[$ on a: $f_3(x_1) = f_3(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. D'où f_3 est une application injective.
Bijective?
Comme l'application f_3 est surjective et injective, alors f est bijective.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \ln\left(|x| + \tfrac{1}{e}\right).$$

f est-elle surjectives?
Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche un réel x s'il existe tel que $y = f(x)$.
On a:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(|x| + \tfrac{1}{e}\right) \Leftrightarrow |x| = e^y - \tfrac{1}{e}$$

Pour $y = -2$, l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solutions.
Donc f n'est pas une application surjective.

f est-elle injectives?
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ln\left(|x_1| + \tfrac{1}{e}\right) = \ln\left(|x_2| + \tfrac{1}{e}\right)$$

$$\Rightarrow |x_1| + \tfrac{1}{e} = |x_2| + \tfrac{1}{e}$$

$$\Rightarrow |x_1| = |x_2|.$$

Pour $x_1 = 1$ et $x_2 = -1$, on a:

$$f(x_1) = f(x_2) = \ln\left(1 + \tfrac{1}{e}\right).$$

Alors, f n'est pas une application injective.
Montrer que la restriction g de f est une bijection

$$g : [0, +\infty[\to [-1, +\infty[, \quad g(x) = f(x).$$

(a)- Soit $y \in [-1, +\infty[$, on cherche un réel $x \in [0, +\infty[$ s'il existe tel que $y = f(x)$.
On a:

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \ln\left(|x| + \tfrac{1}{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow |x| + \tfrac{1}{e} = e^y$$

$$\Leftrightarrow |x| = e^y - \tfrac{1}{e} \geq 0$$

Donc, $\forall y \in [-1, +\infty[, \exists x = e^y - \frac{1}{e} \in [0, +\infty[$ tel que $y = g(x)$,alors g est une application surjective.
(b)- Soient $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \ln\left(|x_1| + \tfrac{1}{e}\right) = \ln\left(|x_2| + \tfrac{1}{e}\right)$$

$$\Rightarrow |x_1| + \tfrac{1}{e} = |x_2| + \tfrac{1}{e}$$

$$\Rightarrow |x_1| = |x_2|$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

donc, g est injective.
Alors, g est une application bijective.
Calculer g^{-1} :

$$g^{-1} : [-1, +\infty[\to [0, +\infty[$$

$$x \mapsto e^x - \tfrac{1}{e}$$

Exercice 6
Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ puis vérifier que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ puis préciser f^{-1}

1. $f(x)=\frac{2x}{x^2+1},\;\; I=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$
Comme la fonction $f:x\mapsto\frac{2x}{x^2+1}$ est continue sur I et strictement décroissante (car $f^{'}(x)=\frac{2-2x^2}{(x+2)^2}\leq 0$), alors f réalise une bijection de I sur $J=f(I)=[-1,0[\cup]0,1]$.
Préciser f^{-1}
Soit $y\in J=f(I)=[-1,0[\cup]0,1]$ et $x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ tel que $y=f(x)$

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow yx^2+y=2x$$

$$\Leftrightarrow yx^2-2x+y=0$$

On a:

$$\Delta^{'}=(-1)^2-(y)(y)=1-y^2,$$

et comme $y\in[-1,0[\cup]0,1]$, alors l'équation $yx^2-2x+y=0$ possède deux solutions:

$$x_1=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y},\;x_2=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

On a:

$$x_1=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\frac{\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)}{y\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)}=\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}},$$

et

$$x_2=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=\frac{\left(1+\sqrt{1-y^2}\right)\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)}{y\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)}=\frac{y}{1-\sqrt{1-y^2}},$$

comme $y\in[-1,0[\cup]0,1]$, donc on prend $x_2\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ et on rejette x_1 car $x_1\notin]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.
Donc, l'application f^{-1} est définie par

$$f^{-1}:[-1,0[\cup]0,1]\rightarrow]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$$

$$y\mapsto\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y},$$

2. $f(x)=\frac{x}{1+|x|},\;\; I=\mathbb{R}$
on a

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x} & si \quad x\geq 0\\ \frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x} & si \quad x\leq 0\end{cases}$$

Pour $x\geq 0$, on a

$$1=\frac{x+1}{x+1}>\frac{x}{x+1}=f(x)\geq 0$$

D'où

$$f\left([0,+\infty[\right) \subset [0,1[$$

Pour $x \leq 0$, on a

$$0 \geq \frac{x}{x+1} = f\left(x\right) > \frac{x-1}{1-x} = -1$$

D'où

$$f\left(]-\infty,0]\right) \subset \left]-1,0\right]$$

Alors,

$$f\left(\mathbb{R}\right) \subset \left]-1,1\right[$$

Vérifions que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-1,1\right[$.
Soit $y \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$

$$y = f\left(x\right) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

Donc,

$$\forall y \in \left[0,1\right[, \exists ! x \in \mathbb{R} \;\; / \;\; y = f\left(x\right)$$

Soit $y \in \left]-1,0\right]$ et $x \in \mathbb{R}$

$$y = f\left(x\right) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

Donc,

$$\forall y \in \left]-1,0\right], \exists ! x \in \mathbb{R} \;\; / \;\; y = f\left(x\right)$$

Finalement,

$$\forall y \in \left]-1,1\right[, \exists ! x \in \mathbb{R} \;\; / \;\; y = f\left(x\right)$$

Préciser f^{-1}
L'application f^{-1} est définie par

$$f^{-1} : \left]-1,1\right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } \; x \in [0,1[\\ \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } x \in \left]-1,0\right] \end{cases}$$

$$f^{-1}\left(x\right) = \frac{x}{1-|x|}$$

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *une application définie par*

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble $f\left(\left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}\right)$ et $f^{-1}\left(\{1, 2\}\right)$
Par définition, on a:

$$\begin{aligned} f\left(\left\{-1, 0, \tfrac{1}{2}, 2\right\}\right) &= \left\{f\left(x\right) \in \mathbb{R} / \;\; x \in \left\{-1, 0, \tfrac{1}{2}, 2\right\}\right\} \\ &= \left\{f\left(-1\right), f\left(0\right), f\left(\tfrac{1}{2}\right), f\left(2\right)\right\} \\ &= \left\{-1, 0, \tfrac{4}{5}\right\} \end{aligned}$$

Par définition, on a:

$$f^{-1}\left(\{1, 2\}\right) = \{x \in \mathbb{R} / \;\; f\left(x\right) \in \{1, 2\}\}$$

On résout les équations suivantes: $f\left(x\right) = 1$ et $f\left(x\right) = 2$.
On a:

$$f\left(x\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Et

$$f\left(x\right) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0.$$

On a

$$\Delta = \left(-1\right)^2 - 4\left(1\right)\left(1\right) = -3,$$

donc, l'équation n'admet pas de solution. Alors

$$f^{-1}\left(\{1, 2\}\right) = \{1\}.$$

2. L'application f est - elle surjective?
L'équation $f\left(x\right) = 2$ n'admet pas des solutions. Donc l'élément $y = 2$ n'a pas d'antécédent. Alors, f n'est pas une application surjective.
L'application f est - elle injective?
On peut trouver deux éléments différents ont même image. Par exemple pour $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 2$,on a: $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) = \frac{4}{5}$. Alors, f n'est pas une application injective.
3. Montrer que l'équation $f(x) = y$ a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1]$.
On résout l'équation $f\left(x\right) = y$
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f\left(x\right) = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0.$$

On a

$$\Delta = \left(-2\right)^2 - 4\left(y\right)\left(y\right) = 4\left(1 - y^2\right),$$

donc l'équation admet des solutions si et seulement si

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[-1, 1\right].$$

Ainsi, on a exactement

$$f(\mathbb{R}) = \{y = f(x) / x \in \mathbb{R}\} = [-1, 1].$$

4. **Montre que la restriction** $g : [-1,1] \to [-1,1]$**,** $g(x) = f(x)$ **est une bijection.**
Soit $y \in [-1,1]$, on cherche un réel $x \in [-1,1]$ s'il existe tel que $y = g(x)$.
On a:

$$y = g(x) \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0.$$

On a

$$\Delta = (-2)^2 - 4(y)(y) = 4\left(1 - y^2\right) \geq 0,$$

Pour $y = 1$, la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ est $x = 1$.
Pour $y = -1$, la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ est $x = -1$.
Pour $y = 0$, la seule solution de l'équation $g(x) = 0$ est $x = 0$.
Pour $y \in]-1,0[\cup]0,1[$, les solutions possibles de l'équation $g(x) = 0$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. la seule solution $x \in [-1,1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \in [-1,1]$.
Alors, pour tout $y \in [-1,1]$, il existe un seule élément $x \in [-1,1]$ tel que $y = g(x)$.D'où g est une application bijective.

$$f^{-1} : [-1,1] \to [-1,1]$$

$$y \mapsto \begin{cases} \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} & \text{si } \ y \in [-1,0[\cup]0,1] \\ \\ 0 & \text{si } \ y = 0 \end{cases}$$

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application définie par*

$$f(x) = x^2.$$

Soient $A = [-2,1]$ et $B = [-1,4]$.
1. Comparer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$
On a:

$$A \cap B = \{x \ / \ x \in A \ \text{ et } \ x \in B\} = [-1,1].$$

Par définition, on a:

$$f(A \cap B) = \{f(x) \ / \ x \in A \cap B\}$$

$$= \{f(x) \ / \ x \in [-1,1]\} = [0,1].$$

$$f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\}$$

$$= \{f(x) \ / \ x \in [-2, 1]\} = [0, 4]$$

$$f(B) = \{f(x) \ / \ x \in B\}$$

$$= \{f(x) \ / \ x \in [-1, 4]\} = [0, 16]$$

Donc,

$$f(A) \cap f(B) = [0, 4]$$

On remarque que

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

2. Comparer $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$

Par définition, on a:

$$f(A \cup B) = \{f(x) \ / \ x \in A \cup B\}$$

$$= \{f(x) \ / \ x \in [-2, 4]\} = [0, 16]$$

et on a:

$$f(A) \cup f(B) = [0, 16]$$

On remarque que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

3. Déterminer $f\left(f^{-1}(A)\right)$ et $f^{-1}f(A)$

On a:

$$f(A) = [0, 4]$$

et

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in A\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 \in [-2, 1]\right\} = [-1, 1]$$

donc

$$f\left(f^{-1}(A)\right) = \left\{f(x) \ / \ x \in f^{-1}(A)\right\}$$

$$= \{f(x) \ / \ x \in [-1, 1]\} = [0, 1]$$

et

$$f^{-1}f(A) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in f(A)\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in [0, 4]\} = [-2, 2]$$

On remarque que

$$f\left(f^{-1}(A)\right) \neq f^{-1}f(A)$$