Corrigé de fiche TD 3 (ALG I)

INF-L1 (2023-2024)

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, la relation $\Re$ définie sur E est - elle réflexive, symétrique, anti-symétrique ou transitive?

1. $E = \mathbb{N}$, $x\Re y \Leftrightarrow \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N}$

Réflexive

$$\forall x \in E, \quad x\Re x$$

Soit $x \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{x+2x}{3} = x \in \mathbb{N} \Rightarrow x\Re x$$

Alors, $\Re$ est réflexive.

Symétrique

$$\forall x, y \in E, \quad x\Re y \Rightarrow y\Re x$$

Soient $x, y \in \mathbb{N}$, on a

$$x\Re y \Rightarrow \frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} \frac{y+2x}{3} \in \mathbb{N}$$

On a

$$\frac{x+2y}{3} + \frac{y+2x}{3} = \frac{3x+3y}{3} = x + y \in \mathbb{N}$$

Alors, $\frac{y+2x}{3} \in \mathbb{N}$, car $\frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N}$, ce qui montre $y\Re x$.

Alors, $\Re$ est symétrique.

Anti-symétrique

$$\forall x, y \in E, \quad (x\Re y \text{ et } y\Re x\ ) \Rightarrow \ x = y$$

Soient $x, y \in \mathbb{N}$, on a

$$(x\Re y \text{ et } y\Re x\ ) \Rightarrow (\frac{x+2y}{3} \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{y+2x}{3} \in \mathbb{N}) \overset{?}{\Rightarrow} x = y$$

Pour $x = 1$ et $y = 4$, on a

$$(1\ \Re\ 4) \text{ et } (4\ \Re\ 1)$$

Donc, il existe $a = 1 \in \mathbb{N}$ et $b = 4 \in \mathbb{N}$, tel que

$$(a\Re b \text{ et } b\Re a\ ) \ \text{ et } (a \neq b)$$

D'où $\Re$ n'est pas antisymétrique.

Transitive

$$\forall x, y \in E, \quad (x\Re y \text{ et } y\Re z\ ) \Rightarrow \ x\Re z$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$, on a

$$(x\Re y \text{ et } y\Re z\ ) \Rightarrow (\tfrac{x+2y}{3} \in \mathbb{N} \text{ et } \tfrac{y+2z}{3} \in \mathbb{N}\ )$$

$$\Rightarrow (\tfrac{x+2y}{3} + \tfrac{y+2z}{3} \in \mathbb{N}\ )$$

$$\Rightarrow (\tfrac{x+2z}{3} + y \in \mathbb{N}\ )$$

$$\Rightarrow (\tfrac{x+2z}{3} \in \mathbb{N}\ )$$

$$\Rightarrow\ x\Re z$$

Alors, $\Re$ est transitive.
2. $E = \mathbb{R}$, $x\Re y \Leftrightarrow |x| = |y|$
Réflexive
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|x| = |x| \Rightarrow x\Re x$$

Alors, $\Re$ est réflexive.
Symétrique
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$x\Re y \Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow y\Re x$$

Alors, $\Re$ est symétrique.
Anti-symétrique
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$(x\Re y \text{ et } y\Re x\ ) \Rightarrow (\ |x| = |y| \ \text{ et } \ |y| = |x|\ ) \overset{?}{\Rightarrow} x = y$$

Pour $x = 1$ et $y = -1$, on a

$$1\ \Re\ (-1)\ \text{ et }\ (-1)\ \Re\ 1$$

Donc, il existe $a = 1 \in \mathbb{R}$ et $b = -1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$(a\Re b \text{ et } b\Re a\ )\ \text{ et } (a \neq b)$$

D'où $\Re$ n'est pas antisymétrique.
Transitive
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$(x\Re y \text{ et } y\Re z\ ) \Rightarrow (\ |x| = |y| \ \text{ et } \ |y| = |z|\ \ )$$

$$\Rightarrow (\ |x| = |z|\ \ )$$

$$\Rightarrow\ x\Re z$$

Alors, $\Re$ est transitive.

3. $E = \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \Re (x', y') \Leftrightarrow x + y' \leq y + x'$
Réflexive
Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$x + y \leq y + x \Rightarrow (x, y) \Re (x, y)$$

Alors, $\Re$ est réflexive.
Symétrique
Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$(x, y) \Re (x', y') \Rightarrow x + y' \leq y + x' \overset{?}{\Rightarrow} x' + y \leq y' + x$$

Pour $(x, y) = (1, 3)$ et $(x', y') = (2, -2)$

$$x + y' \leq y + x' \;\text{ et }\; x' + y > y' + x$$

Donc, il existe $(x, y) = (1, 3) \in \mathbb{Z}^2$ et $(x', y') = (2, -2) \in \mathbb{Z}^2$, tel que

$$(\,(x, y) \Re (x', y')\;) \;\text{ et }\; (\,(x', y') \;\textit{n'est pas en relation avec}\; (x, y)\,)$$

D'où $\Re$ n'est pas symétrique.
Anti-symétrique
Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$(\,(x, y) \Re (x', y') \;\text{ et }\; (x', y') \Re (x, y)\;) \Rightarrow x + y' \leq y + x' \text{ et } x' + y \leq y' + x$$

$$\Rightarrow x + y' = y + x'$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} (x, y) = (x', y')$$

Pour $(x, y) = (2, -3)$ et $(x', y') = (4, -1)$

$$x + y' \leq y + x' \;\text{ et }\; x' + y \leq y' + x$$

Donc, il existe $(x, y) = (2, -3) \in \mathbb{Z}^2$ et $(x', y') = (4, -1) \in \mathbb{Z}^2$, tel que

$$(\,(x, y) \Re (x', y')\;) \;\text{ et }\; (\,(x', y') \;\Re (x, y)\,) \;\text{ et }\; (\,(x, y) \neq (x', y')\,)$$

D'où $\Re$ n'est pas antisymétrique.
Transitive
Soient $(x, y), (x', y'), \left(x'', y''\right) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$(\,(x, y) \Re (x', y') \;\text{ et }\; (x', y') \Re \left(x'', y''\right)) \Rightarrow x + y' \leq y + x' \text{ et } x' + y'' \leq y' + x''$$

$$\Rightarrow x + y' + x' + y'' \leq y + x' + y' + x''$$

$$\Rightarrow x + y'' \leq y + x''$$

$$\Rightarrow \;\; (x, y) \Re \left(x'', y''\right)$$

Alors, $\Re$ est transitive.

Exercice 2

Soit $E = \{1, 2, 3, 5, 8, 14, 17\}$

1. Montrer que l'on peut définir une relation d'équivalence sur E en posant $x\Re y$ si et seulement si $\frac{x+y}{2} \in \mathbb{N}$.

Graphe de $\Re$:

$$\Gamma_{\Re} = \left\{(x, y) \in E^2, x\Re y\right\} = \left\{(x, y) \in E^2, \tfrac{x+y}{2} \in \mathbb{N}\right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,3), (1,5), (1,17), (2,2), (2,8), (2,14), \\ (3,1), (3,3), (3,5), (3,17), (5,1), (5,3), (5,5), \\ (5,17), (8,2), (8,8), (8,14), (14,2), (14,8), \\ (14,14), (17,1), (17,3), (17,5), (17,17) \end{array} \right\}$$

On a:

(i) Soit $x \in E$, on a:

$$\tfrac{x+x}{2} = x \in \mathbb{N} \Rightarrow x\Re x$$

Alors, $\Re$ est réflexive.

(ii) Soient $x, y \in E$, on a:

$$x\Re y \Rightarrow \tfrac{x+y}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \tfrac{y+x}{2} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y\Re x$$

Alors, $\Re$ est symétrique.

(iii) Soient $x, y, z \in E$, on a:

$$(x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow (\tfrac{x+y}{2} \in \mathbb{N} \text{ et } \tfrac{y+z}{2} \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \tfrac{x+y}{2} + \tfrac{y+z}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow y + \tfrac{x+z}{2} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \tfrac{x+z}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow x\Re z$$

Alors, $\Re$ est transitive.

De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\Re$ est une relation d'équivalence.

2. Trouver les classes d'équivalence

Soit $x \in E$, on a:

$$Cl\,(x) = \{y \in E \;\; / \;\; y\Re x\} = \left\{y \in \mathbb{R} \;\; / \;\; \tfrac{y+x}{2} \in \mathbb{N}\right\}.$$

Si x est impair, alors y est impair.

Si x est pair, alors y est pair.
Donc,
si $x \in \{1, 3, 5, 17\}$

$$Cl\,(x) = \{1, 3, 5, 17\}\,,$$

si $x \in \{2, 8, 14\}$

$$Cl\,(x) = \{2, 8, 14\}$$

Exercice 3

Dans $\mathbb{Z}$ on considère la relation $\Re$ définie par:

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x\Re y \Leftrightarrow x - y \ \textit{est un multiple de 6}$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$, on a:
(i)

$$x - x = 0 = 0 \times 6 \Rightarrow x - y \ \textit{est un multiple de}\ 6$$

$$\Rightarrow x\Re x$$

Alors, $\Re$ est réflexive.
(ii)

$$x\Re y \Rightarrow x - y \ \textit{est un multiple de}\ 6$$

$$\Rightarrow x - y = 6k,\ \textit{avec}\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y - x = -6k,$$

$$\Rightarrow \exists p = -k \in \mathbb{Z},\ y - x = 6p$$

$$\Rightarrow y - x \ \textit{est un multiple de}\ 6$$

$$\Rightarrow y\Re x$$

Alors, $\Re$ est symétrique.

(iii)

$(x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow (x-y \textit{ est un multiple de } 6 \text{ et } y-z \textit{ est un multiple de } 6)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=6k_1 \\ \\ y-z=6k_2 \end{cases}, \quad avec \;\; k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow x-y+y-z=6k_1+6k_2$

$\Rightarrow x-z=6\left(k_1+k_2\right)$

$\Rightarrow \exists k_3=k_1+k_2 \in \mathbb{Z},\; x-z=6k_3$

$\Rightarrow x-z \textit{ est un multiple de } 6$

$\Rightarrow x\Re z$

Alors, $\Re$ est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\Re$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminer l'ensemble quotient

On sait que $\mathbb{Z}_{/\Re}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de $\mathbb{Z}$.
Et comme $\Re$ c'est la relation de congruence, alors

$$\mathbb{Z}/_{\Re}=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}=\left\{\dot{\overline{0}},\dot{\overline{1}},\dot{\overline{2}},\dot{\overline{3}},\dot{\overline{4}},\dot{\overline{5}}\right\}$$

3. Montrer que: $\dot{\overline{30}}=\dot{\overline{0}}$ **et** $\dot{\overline{12}}\cap\dot{\overline{57}}=\varnothing$.

On sait que deux classes d'équivalences sont soit **les mêmes**, soit **disjointes**.
On a

$$30-0=5\times 6,$$

ce qui implique

$$30 \;\Re\; 0,$$

alors,

$$\dot{\overline{30}} \;=\; \dot{\overline{0}}.$$

Et on a

$$57-12=45=7\times 6+3,$$

ce qui implique

$$57 \textit{ n'est pas en relation avec } 12,$$

alors,

$$\dot{\overline{57}} \;\cap\; \dot{\overline{12}} \;=\varnothing$$

Exercice 4

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la relation $\Re$ par:

$$(a,b)\,\Re\,(c,d) \Leftrightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$$

$\Re$ est elle une relation d'équivalence? Si oui quelles sont les classes d'équivalence ?

Soient $(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{R}^2$, on a:

(i)

$$a^2+b^2=a^2+b^2 \Rightarrow (a,b)\,\Re\,(a,b)$$

Alors, $\Re$ est réflexive.

(ii)

$$(a,b)\,\Re\,(c,d) \Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2$$

$$\Rightarrow c^2+d^2=a^2+b^2$$

$$\Rightarrow (c,d)\,\Re\,(a,b)$$

Alors, $\Re$ est symétrique.

(iii)

$$(\,(a,b)\,\Re\,(c,d)\ \text{ et }\ (c,d)\,\Re\,(e,f)\,) \Rightarrow (a^2+b^2=c^2+d^2 \text{ et } c^2+d^2=e^2+f^2)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=e^2+f^2$$

$$\Rightarrow (a,b)\,\Re\,(e,f)\,.$$

Alors, $\Re$ est transitive.

De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\Re$ est une relation d'équivalence.

Déterminer la classe d'équivalence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a:

$$Cl\,((a,b))=\left\{(c,d)\in\mathbb{R}^2\ \ /\ \ (c,d)\,\Re\,(a,b)\right\}$$

$$=\left\{(c,d)\in\mathbb{R}^2\ \ /\ \ c^2+d^2=a^2+b^2\right\}$$

$$c^2+d^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow c^2+d^2=r^2, \quad \text{avec } r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Donc, (c,d) sont les points du cercle de centre $O\,(0,0)$ et de rayon $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

2. Dans $\mathbb{Z}$, on définit la relation $\Re$ par:

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ x\Re y \Leftrightarrow x^2-y^2=x-y$$

$\Re$ est elle une relation d'équivalence? Si oui quelles sont les classes d'équivalence ?

Soient $x,y,z\in\mathbb{Z}$, on a:

(i)
$$x^2 - x^2 = 0 = x - x \Rightarrow x\Re x$$
Alors, $\Re$ est réflexive.
(ii)
$$x\Re y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$$
$$\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x$$
$$\Rightarrow y\Re x$$
Alors, $\Re$ est symétrique.
(iii)
$$(x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow (x^2 - y^2 = x - y \text{ et } y^2 - z^2 = y - z)$$
$$\Rightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z$$
$$\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z$$
$$\Rightarrow x\Re z$$
Alors, $\Re$ est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\Re$ est une relation d'équivalence.
Déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{Z}$
Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a:
$$Cl\,(x) = \{y \in E \quad / \quad y\Re x\}$$
$$= \left\{y \in \mathbb{Z} \quad / \quad y^2 - x^2 = y - x\right\}$$
$$y^2 - x^2 = y - x \Leftrightarrow (y - x)\,(y + x) - (y - x) = 0$$
$$\Leftrightarrow (y - x)\,(y + x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y - x = 0 \\ \\ y + x - 1 = 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ \\ y = 1 - x \end{array} \right.$$
Donc,
$$Cl\,(x) = \{x, 1 - x\}$$

Exercice 5

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation T par:

$$xTy \Leftrightarrow x \leq y$$

Montrer que T est une relation d'ordre
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a:
(i)

$$x \leq x \Rightarrow xTx$$

Alors, T est réflexive.
(ii)

$$\begin{cases} x\ T\ y \\ \\ et \\ \\ y\ T\ x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq y \\ \\ et \\ \\ y \leq x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = y$$

Alors, T est antisymétrique.
(iii)

$$\begin{cases} x\ T\ y \\ \\ et \\ \\ y\ T\ z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq y \\ \\ et \\ \\ y \leq z \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y \leq y + z$$

$$\Rightarrow x \leq z$$

$$\Rightarrow x\ T\ z$$

Alors, T est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que T est une relation d'ordre.
L'ordre est il total?
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a:

$$x \leq y \quad ou \quad y \leq x$$

Donc, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a:

$$xTy \quad ou \quad yTx$$

Ce qui montre que l'ordre est total.

Exercice 6

Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation binaire notée $|$ par :

$$x|y \text{ si et seulement si } x \text{ divise } y$$

1 . Montrer que | est une relation d'ordre
Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, on a:
(i)

$$x = 1 \times x \Rightarrow \exists k = 1 \in \mathbb{N}^*,\ x = k \times x \Rightarrow x|x$$

Alors, | est réflexive.
(ii)

$$\begin{cases} x \mid y \\ \\ et \\ \\ y \mid x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{N}^*,\ y = k_1 \times x \\ \\ et \\ \\ \exists k_2 \in \mathbb{N}^*,\ x = k_2 \times y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = k_2 \times k_1 \times x$$

$$\Rightarrow k_2 \times k_1 = 1$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = 1$$

donc,

$$x = y$$

Alors, | est antisymétrique.
(iii)

$$\begin{cases} x \mid y \\ \\ et \\ \\ y \mid z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{N}^*,\ y = k_1 \times x \\ \\ et \\ \\ \exists k_2 \in \mathbb{N}^*,\ z = k_2 \times y \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = k_1 \times k_1 \times x$$

$$\Rightarrow \exists k_3 = k_1 k_2 \in \mathbb{N}^*,\ z = k_3 \times x$$

$$\Rightarrow x \mid z$$

Alors, | est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que | est une relation d'ordre.
2 . Trouver un élément x_0 tel que pour tout x dans $\mathbb{N}^*$ x_0 divise x.
Soit $x \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$x = 1 \times x \Rightarrow \exists x_0 = 1 \in \mathbb{N}^*,\ x = x_0 \times x \Rightarrow x_0|x$$

3 . L 'ordre est il total?

Soient $x = 5, y = 7 \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$x \textit{ ne divise pas } y$$

$$et$$

$$y \textit{ ne divise pas } x$$

On déduit que l'ordre est partiel.

Exercice 7

Soit $\preceq$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par:

$$x \preceq y \Leftrightarrow \exists p, q \geq 1,\ y = px^q, \quad \text{avec } p, q \text{ entiers.}$$

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.
Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$, on a:
(i)

$$x = 1 \times x^1 \Rightarrow \exists p = 1, q = 1 \text{ avec } p, q \geq 1,\ x = px^q \Rightarrow x \preceq x$$

Alors, $\preceq$ est réflexive.
(ii)

$$\begin{cases} x \ \preceq \ y \\ \\ \quad et \\ \\ y \ \preceq \ x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists p_1, q_1 \geq 1,\ y = p_1 x^{q_1} \\ \\ \qquad\qquad et \\ \\ \exists p_2, q_2 \geq 1,\ x = p_2 y^{q_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = p_1 \left(p_2 y^{q_2}\right)^{q_1} = p_1 p_2^{q_1} y^{q_2 q_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 p_2^{q_1} = 1 \\ \\ q_2 q_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_1 = p_2 = q_2 = q_1 = 1$$

donc,

$$x = y$$

Alors, $\preceq$ est antisymétrique.

(iii)

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & \preceq & y \\ & & \\ & et & \\ & & \\ y & \preceq & z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \exists p_1, q_1 \geq 1,\ y = p_1 x^{q_1} \\ \\ et \\ \\ \exists p_2, q_2 \geq 1,\ z = p_2 y^{q_2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow z = p_2 y^{q_2} = p_2 \left(p_1 x^{q_1}\right)^{q_2} = p_2 p_1^{q_2} x^{q_1 q_2}$$

$$\Rightarrow \exists p_3 = p_2 p_1^{q_2} \geq 1, q_3 = q_1 q_2 \geq 1,\ z = p_3 x^{q_3}$$

$$\Rightarrow x\ \preceq\ z$$

Alors, $\preceq$ est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\preceq$ est une relation d'ordre.

2. L'ordre est il total?

Soient $x = 3, y = 4 \in \mathbb{N}$, on a:

$$x \textit{ n'est pas en relation avec } y$$

$$et$$

$$y \textit{ n'est pas en relation avec } x$$

On déduit que l'ordre est partiel.