# Corrigé de fiche TD 4 (ALG I)

**INF-L1 (2023-2024)**

**Exercice 1**

**1.** Soit $*$ la loi de composition interne définie dans $\mathbb{Q}$ par

$$x * y = \frac{x+y}{2}.$$

**Montrer que $*$ n'est pas associative.**
*La loi $*$ est dite associative si et seulement si:*

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x * y) * z = x * (y * z).$$

*La loi $*$ n'est pas associative si et seulement si:*

$$\exists x, y, z \in E, \quad (x * y) * z \neq x * (y * z).$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{Q}$, on a

$$(x * y) * z = \frac{x+y}{2} * z = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

et

$$x * (y * z) = x * \frac{y+z}{2} = \frac{x + \frac{y+z}{2}}{2} = \frac{2x+y+z}{4}.$$

Si on prend $x = 1, y = 2$ et $z = 4$, on trouve

$$(x * y) * z = \frac{11}{4},$$

et

$$x * (y * z) = 2.$$

Donc, il existe $x = 1, y = 2,\ z = 4 \in \mathbb{Q}$ tel que $(x * y) * z \neq x * (y * z)$.
D'où $*$ n'est pas associative.

**2.** Soit $T$ la loi de composition interne définie dans $\mathbb{R}$ par

$$xTy = xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right).$$

**Montrer que $T$ n'est pas associative.**
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$(xTy)\,Tz = \left(xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)\right) Tz$$

$$= \left(xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)\right) z + \left(\left(xy + \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)\right)^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right),$$

et

$$xT\,(yTz) = xT\left(\left(yz + \left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right)\right)\right)$$

$$= x\left(yz + \left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right)\right) + \left(x^2 - 1\right)\left(\left(yz + \left(y^2 - 1\right)\left(z^2 - 1\right)\right)^2 - 1\right).$$

Si on prend $x = 2, y = 0$ et $z = 5$, on trouve

$$(xTy)\,Tz = 177,$$

et

$$xT\,(yTz) = 1677.$$

Donc, il existe $x = 2, y = 0,\ z = 5 \in \mathbb{R}$ tel que $(xTy)\,Tz \neq xT\,(yTz)$.
D'où $T$ n'est pas associative.
**3. $T$ admet-elle un élément neutre?**
*La loi $T$ admet sur $E$ un élément neutre (noté e), si et seulement si:*

$$\exists e \in E, \forall x \in E, \quad xTe = eTx = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$xTe = x \Longleftrightarrow xe + \left(x^2 - 1\right)\left(e^2 - 1\right) = x$$

$$\Leftrightarrow x\,(e-1) + \left(x^2 - 1\right)\left(e^2 - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e-1)\left(x + \left(x^2 - 1\right)(e+1)\right) = 0.$$

Pour $e = 1$, on a

$$xT1 = x \times 1 + \left(x^2 - 1\right)\left((1)^2 - 1\right) = x,$$

et

$$1Tx = 1 \times x + \left((1)^2 - 1\right)\left(x^2 - 1\right) = x.$$

Donc, il existe $e = 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ \ xTe = eTx = x$.
Alors, $T$ admet un élément netre $e = 1$.
**Exercice 2**

**1. Montrer que $H$ est un sous groupe de $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$**

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x - y = 0\right\}.$$

(i) $H \neq \emptyset$, car $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in H$.
(ii) Soient $u = (x, y)\,, v = (x', y') \in H$

$$u, v \in H \Rightarrow x - y = 0 \text{ et } x' - y' = 0.$$

On a:

$$u + v = \left(\underbrace{x + x'}_{a}, \underbrace{y + y'}_{b}\right),$$

$$a - b = (x + x') - (y + y')$$

$$= (x - y) + (x' - y') = 0 + 0 = 0.$$

Alors, $u+v \in H$.
(iii) Soit $u=(x,y) \in H$

$$u \in H \Rightarrow x-y=0.$$

L'élément symétrique de $u$ est

$$u^{-1}=-u=(-x,-y).$$

On a

$$(-x)-(-y)=-(x-y)=0.$$

Alors, $u^{-1} \in H$.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que $H$ *est un sous groupe de* $\left(\mathbb{R}^2,+\right)$.
**2.** Soit

$$K=\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x-y=1\right\}.$$

$K$ **est-il un sous groupe de** $\left(\mathbb{R}^2,+\right)$?
On a $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0) \notin K$, car

$$x_{0_{\mathbb{R}^2}}-y_{0_{\mathbb{R}^2}}=0 \neq 1.$$

Donc, $K$ n'est pas un sous groupe de $\left(\mathbb{R}^2,+\right)$.
**Exercice 3**

On considère les permutations suivantes

$$id=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Calculer** $\sigma_1 \circ \sigma_3, \sigma_1 \circ \sigma_1, \sigma_1 \circ \sigma_2, \sigma_3 \circ \sigma_2,$

$$\sigma_1 \circ \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ \sigma_1 \circ \sigma_3(1) & \sigma_1 \circ \sigma_3(2) & \sigma_1 \circ \sigma_3(3) & \sigma_1 \circ \sigma_3(4) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ \sigma_1\ (\sigma_3(1)) & \sigma_1\ (\sigma_3(2)) & \sigma_1\ (\sigma_3(3)) & \sigma_1\ (\sigma_3(4)) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ \sigma_1\ (4) & \sigma_1\ (1) & \sigma_1\ (2) & \sigma_1\ (3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=id.$$

De la même manière on trouve:

$$\sigma_1 \circ \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2.$$

$$\sigma_1 \circ \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_3.$$

$$\sigma_3 \circ \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1.$$

**Exercice 4**

**Montrer que les applications suivantes sont des homomorphismes de groupes**

**1.**

$$\exp : (\mathbb{R}, +) \to \left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$$

$$x \mapsto \exp x$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a:

$$\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$= \exp(x) \times \exp(y).$$

Alors, exp est un homomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$.

**2.**

$$f : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$$

$$x \mapsto \cos x + i \sin x$$

Soient $x, y \in \mathbb{C}$, on a:

$$f(x+y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

et

$$f(x) \times f(y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$

$$= \cos x \cos y + i \cos x \sin y + i \sin x \cos y - \sin x \sin y$$

$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$$

$$= \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

$$= f(x+y)$$

Alors, $f$ est un homomorphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

**Exercice 5**
Soit $*$ la loi de composition définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ par:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}, x*y = x+y+3xy.$$

**1. Montrer que $\left(\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\},*\right)$ est un groupe commutatif**
**(a). Montrer que $*$ est interne, c'est à dire**

$$\forall x,y \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}, \quad x*y \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}.$$

Soient $x,y \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, donc, $x \neq -\frac{1}{3}$ et $y \neq -\frac{1}{3}$.

Supposons que: $x * y = -\frac{1}{3}$, Alors

$$x \ * \ y = -\tfrac{1}{3} \Leftrightarrow x+y+3xy = -\tfrac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x+3y+9xy+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x\,(1+3y)+(3y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+3y)\,(1+3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -\tfrac{1}{3} \ \text{ ou } \ x = -\tfrac{1}{3}.$$

Ce qui donne une contradiction, alors d'après le raisonnement par l'absurde, on déduit que

$$x*y \neq -\tfrac{1}{3}.$$

Donc,

$$x+y+3xy \in \mathbb{R}-\left\{-\tfrac{1}{3}\right\}.$$

On déduit que la loi $*$ est interne dans $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

**(b). La loi $*$ est commutative, c'est à dire**

$$\forall x,y \in \mathbb{R}-\left\{-\tfrac{1}{3}\right\}, \quad x*y = y*x.$$

Soient $x,y \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, on a:

$$x \ * \ y = x+y+3xy$$

$$= y+x+3yx$$

$$= y*x,$$

donc, $*$ est commutative.

**(c). La loi $*$ est associative, c'est à dire**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{1}{3}\right\}, \ x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, on a:

$$x * (y * z) = x * (y + z + 3yz)$$

$$= x + (y + z + 3yz) + 3x\,(y + z + 3yz)$$

$$= x + y + z + 3yz + 3xy + 3xz + 9xyz,$$

et

$$(x * y) * z = (x + y + 3xy) * z$$

$$= (x + y + 3xy) + z + 3\,(x + y + 3xy)\,z$$

$$= x + y + 3xy + z + 3xz + 3yz + 9xyz,$$

et donc on a

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

D'où $*$ est associative.

**(d). La loi $*$ est admet un élément neutre, c'est à dire**

$$\exists e \in \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{1}{3}\right\}, \forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{1}{3}\right\}, \ x * e = e * x = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, on a

$$x * e = x \Leftrightarrow x + e + 3xe = x$$

$$\Leftrightarrow e\,(1 + 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e = 0 \quad \text{car} \ \ 1 + 3x \neq 0,$$

et comme la loi $*$ est commutative, alors $*$ admet un élément neutre $e = 0$.

**(e). Chaque élément de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ admet un symétrique dans $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, c'est à dire**

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{1}{3}\right\}, \ \exists x' \in \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{1}{3}\right\}, x * x' = x' * x = e.$$

Soit $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, on cherche un élément $x'$ dans $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ tel que $x * x' = x' * x = e$.

On a:

$$x * x' = e \Leftrightarrow x + x' + 3xx' = 0$$

$$\Leftrightarrow x'\,(1 + 3x) = -x$$

$$\Leftrightarrow x' = -\tfrac{x}{1+3x}, \quad \text{car} \ \ 1 + 3x \neq 0.$$

$x' = -\frac{x}{1+3x} \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$?

Supposons que: $x' = -\frac{1}{3}$, alors

$$x' = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{x}{1+3x} = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3x = 1 + 3x$$

$$\Leftrightarrow 0 = 1.$$

Ce qui donne une contradiction, alors d'apres le raisonnement par l'absurde, on déduit que

$$x' \neq -\frac{1}{3},$$

et comme la loi $*$ est commutative, alors chaque élément $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ admet un symétrique $x' = -\frac{x}{1+3x}$ dans $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Finalement, $\left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}, *\right)$ est un groupe commutatif.

**2.** Soit $H$ le sous ensemble de $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ définie par $H = [0, +\infty[$.
$(H, *)$ **est-il un sous groupe de** $\left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}, *\right)$**? justifier votre réponse.**
(i) $e = 0 \in H$.
(ii) Soient $x, y \in H$

$$x * y^{-1} \in H?$$

On a:

$$x * y^{-1} = x * \left(-\frac{y}{1+3y}\right)$$

$$= x + \left(-\frac{y}{1+3y}\right) + 3x\left(-\frac{y}{1+3y}\right)$$

$$= x - \frac{y}{1+3y} - \frac{3xy}{1+3y}$$

$$= \frac{x-y}{1+3y} \in H?$$

Pour $x = 1$ et $y = 3$, on a:

$$x * y^{-1} = -\frac{1}{5} \notin H.$$

Alors, $H$ *n'est pas un sous groupe de* $\left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}, *\right)$.
**3.** Soit $f$ l'application définie par

$$f : (\mathbb{R}^*, \times) \to \left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}, *\right)$$
$$x \mapsto \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$f$ **est-elle un morphisme de groupes? justifier votre réponse.**

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$, on a:

$$f(x \times y) = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3},$$

et

$$\begin{aligned} f(x) * f(y) &= \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) * \left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(x-1)(y-1) \\ &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(xy - x - y + 1) \\ &= \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3} = f(x \times y). \end{aligned}$$

Alors, $f$ est un homomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}^*, \times)$ sur le groupe $\left(\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}, *\right)$.

**Exercice 6**

*Soit*

$$A = \left\{\frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \textit{ entier naturel impair}\right\}$$

**1. Démontrer que** $(A, +, \times)$ **est un anneau.**

Démontrons que $A$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Soient $x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{q} \in A$, on a:

$$x + (-y) = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - pn}{nq}$$

*et*

$$xy = \frac{mp}{nq}.$$

Comme $nq$, produit de deux nombres impairs, est impair, et que $A \neq \emptyset$ (car$1_{\mathbb{Q}} = 1 \in A$), on déduit que $A$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

**2. Déterminons les inversibles de** $A$**.**

Soit $x = \frac{m}{n} \in A$ inversible, et soit $y = \frac{p}{q} \in A$ tel que $xy = 1$.

$$xy = 1 \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np.$$

En particulier, $m$ est nécessairement impair.

Réciproquement, si $x = \frac{m}{n}$ avec $m$ impair, alors $y = \frac{n}{m} \in A$ (si $m < 0$, il suffit d'écrire $y = \frac{-n}{-m}$) et $xy = 1$.

Donc, les inversibles de $A$ sont les éléments $\frac{m}{n}$ avec $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ et $m, n$ impairs.

**Exercice 7**

On munit $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois de composition interne:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \times (x', y') = (xx', xy' + yx')$$

1. Montrer que $A$ muni de ces deux lois est un anneau commutatif unitaire.

**1.** $(A,+)$ **est un groupe abélien**

(a). $+$ est commutative

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$$

Soient $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$=(c+a,d+b)$$
$$=(c,d)+(a,b).$$

(b). $+$ est associaive,

$$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)+((c,d)+(e,f))=((a,b)+(c,d))+(e,f)$$

Soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(a,b)+((c,d)+(e,f))= \ (a,b)+(c+e,d+f)$$
$$=(a+c+e,b+d+f)$$
$$=(a+c,b+d)+(e,f)$$
$$=((a,b)+(c,d))+(e,f).$$

(c). Elément neutre

$$\exists (e_1,e_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)+(e_1,e_2)=(e_1,e_2)+(a,b)=(a,b)$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(a,b)+(e_1,e_2)=(a,b) \Leftrightarrow (a+e_1,b+e_2)=(a,b)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+e_1=a \\ b+e_2=b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1=0 \\ e_2=0 \end{cases},$$

comme la loi $+$ est commtative, alors

$$(e_1,e_2)+(a,b)=(a,b)+(e_1,e_2)=(a,b),$$

d'où $+$ possède un élément neutre $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)$.

(d). Elément symétrique

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \exists (a',b') \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)+(a',b') = (a',b')+(a,b) = (e_1,e_2)$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b)+(a',b') = (0,0) \Leftrightarrow (a+a',b+b') = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+a' = 0 \\ b+b' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = -a \\ b' = -b \end{cases}$$

comme la loi $+$ est commtative, alors

$$(a',b')+(a,b) = (a,b)+(a',b') = (0,0),$$

D'où tout élément $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est symétrisable et son symétrique est $(a',b') = (-a,-b)$.

**2.** $\times$ **est associative,**

$$\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)\times((c,d)\times(e,f)) = ((a,b)\times(c,d))\times(e,f)$$

Soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$, on a:

$$(a,b)\times((c,d)\times(e,f)) = (a,b)\times(ce,cf+ed)$$

$$= (a(ce), a(cf+ed)+b(ce))$$

$$= (ace, acf+aed+bce),$$

et

$$((a,b)\times(c,d))\times(e,f) = (ac,ad+bc)\times(e,f)$$

$$= ((ac)e, (ac)f+(ad+bc)e)$$

$$= (ace, acf+ade+bce),$$

et donc on a

$$(a,b)\times((c,d)\times(e,f)) = ((a,b)\times(c,d))\times(e,f).$$

**3.** $\times$ **est commtative,**

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)\times(c,d) = (c,d)\times(a,b)$$

$$(a,b)\times(c,d)=(ac,ad+bc)$$

$$=(ca,cb+da)=(c,d)\times(a,b)\,.$$

**4.** $\times$ **est distributive par rapport à** $+$ , $\forall\,(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{R}^2$,

$$(a,b)\times((c,d)+(e,f))=((a,b)\times(c,d))+((a,b)\times(e,f))$$

$$et$$

$$((c,d)+(e,f))\times(a,b)=((c,d)\times(a,b))+((e,f)\times(a,b))\,.$$

Soient $(a,b)\,,(c,d)\,,(e,f)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$(a,b)\times((c,d)+(e,f))=(a,b)\times(c+e,d+f)$$

$$=(a\,(c+e)\,,a\,(d+f)+b\,(c+e))$$

$$=(ac+ae,ad+af+bc+be)\,,$$

et

$$((a,b)\times(c,d))+((a,b)\times(e,f))=(ac,ad+bc)+(ae,af+be)$$

$$=(ac+ae,ad+bc+af+be)\,,$$

donc

$$(a,b)\times((c,d)+(e,f))=((a,b)\times(c,d))+((a,b)\times(e,f))$$

Comme la loi $\times$ est commtative, alors

$$((c,d)+(e,f))\times(a,b)=(a,b)\times((c,d)+(e,f))$$

$$=((a,b)\times(c,d))+((a,b)\times(e,f))$$

$$=((c,d)\times(a,b))+((e,f)\times(a,b))\,,$$

d'où $\times$ est distributive par rapport à $+$.

**5. Elément neutre par rapport à** $\times$

$$\exists\,(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2,\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad (a,b)\times(a_1,a_2)=(a_1,a_2)\times(a,b)=(a,b)$$

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$(a,b)\times(a_1,a_2)=(a,b)\Leftrightarrow(aa_1,aa_2+ba_1)=(a,b)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} aa_1=a \\ aa_2+ba_1=b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=0\end{cases},$$

comme la loi $\times$ est commtative, alors

$$(a_1,a_2)\times(a,b)=(a,b)\times(a_1,a_2)=(a,b),$$

d'où $\times$ possède un élément neutre $1_{\mathbb{R}^2}=(1,0)$
2. Soit

$$X=\{(x,0)\,/x\in\mathbb{R}\}$$

**Montrer que $X$ est un sous anneau**
On a
(i). $X\neq\emptyset$, car $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\in X$.
(ii). Soient $u=(x,0)\,,v=(y,0)\in X$,

$$u-v=(x-y,0)\in X.$$

(iii). Soient $u=(x,0)\,,v=(y,0)\in X$,

$$u\times v=(xy,0)\in X.$$

De (i), (ii) et (iii), on déduit que $X$ est un sous anneau de $(A,+,\times)$.
**Montrer que l'application qui à tout $x\in\mathbb{R}$ associe le couple $(x,0)$ de $X$ est un homomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ sur l'anneau $X$.**
Notons

$$h:\mathbb{R}\to X$$

$$x\mapsto(x,0)$$

Soient $x,y\in\mathbb{R}$, on a

$$h(x+y)=(x+y,0)=(x,0)+(y,0)$$

$$=h(x)+h(y),$$

et

$$h(xy)=(xy,0)=(x,0)\times(y,0)$$

$$=h(x)\times h(y).$$

Alors, $h$ est un homomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$ sur l'anneau $X$.

**Exercice 8**

**1. Montrer que $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ admet des diviseurs de zéro. $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ est -il un corps?**

On sait que

$$\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z} = \left\{\dot{\bar{0}}, \dot{\bar{1}}, \dot{\bar{2}}, \dot{\bar{3}}, \dot{\bar{4}}, \dot{\bar{5}}\right\}$$

On a:

$$\dot{\bar{2}} \ \dot{\times} \ \dot{\bar{3}} \ = \ \dot{\bar{0}}$$

et

$$\dot{\bar{4}} \ \dot{\times} \ \dot{\bar{3}} \ = \ \dot{\bar{0}}$$

Donc, $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ admet des diviseurs de zéro.

**$\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ est-il un corps?**

On dit que $(E, +, \bullet)$ est un corps si $(E, +, \bullet)$ est un anneau unitaire et tout élément non nul de $E$ est inversible.

Comme il existe des éléments de $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z} - \left\{\dot{\bar{0}}\right\}$ ne sont pas inversibles (par exemple $\dot{\bar{x}} = \dot{\bar{2}}$), alors $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ n'est pas un corps.

**2. $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ est-il un anneau intègre?**

Comme le zéro admet de diviseurs, alors $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ n'est pas un anneau intègre.

Ou

On dit que $(E, +, \bullet)$ est un anneau intègre si

$$\forall a, b \in E, a \bullet b = 0_E \Rightarrow a = 0_E \vee b = 0_E$$

Il existe $a = \dot{\bar{2}} \vee b = \dot{\bar{3}} \in \mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ tel que

$$\left(a \dot{\times} b = \dot{\bar{0}}\right) \wedge \left(a \neq \dot{\bar{0}} \ \wedge \ b \neq \dot{\bar{0}}\right),$$

alors $\mathbb{Z}/_6\mathbb{Z}$ n'est pas un anneau intègre.

**3. Montrer que $\mathbb{Z}/_5\mathbb{Z}$ est un corps.**

$\mathbb{Z}/_5\mathbb{Z}$ est un corps, car 5 est premier.

**3. Déterminer l'ensemble de tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$.**

Soit $\dot{\bar{a}} \in \mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$, On dit que $\dot{\bar{a}}$ est inversible s'il existe $\dot{\bar{b}} \in \mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}$ tel que

$$\dot{\bar{a}} \ \dot{\times} \ \dot{\bar{b}} \ = \ \dot{\bar{1}}$$

Alors,

$$ab \equiv 1\,[n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, ab = 1 + kn$$

$$\Leftrightarrow PGCD\,(a, n) = 1.$$

Donc, l'ensemble de tous les éléments inversibles est:

$$\left\{\dot{\bar{a}} \in \mathbb{Z}/_n\mathbb{Z}/PGCD\,(a, n) = 1\right\}$$