Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département d'Informatique

Calulatries et téléphones portables sont stritement interdits

Examen Final du module Algèbre 1 (2023-2024)
Durée: 1h30mn - 11/01/2024

Exercice 1: (04 points)

1. *Définir l'ensemble* $3\mathbb{Z}$*,* $3\mathbb{Z}$ *est-il un sous groupe de* $(\mathbb{Z}, +)$*? Justifier votre réponse.*

2. *Ecrire la table de multiplication de* $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \dot{\times})$ *et donner les éléments qui ne sont pas inversibles.*

3. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *est-il un anneau intègre? Justifier votre réponse.*

Exercice 2: (06 points)

Soit f *l'application définie par:* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x - 3.$

1. f *est-elle injective? surjevctive? bijective? Justifier votre réponse.*

2. D*éterminer* $f([3, 5])$.

3. *Montrer que l'application* $g : [-2, +\infty[\to [-7, +\infty[$ *définie par* $g(x) = f(x)$ *est bijective.*

Exercice 3: (05 points)

On définit dans $\mathbb{R}$ *la relation* $\Re$ *par:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\Re y \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2 = 2|x^2 - 1| - 2|y^2 - 1|$$

1. *Montrer que* $\Re$ *est une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}$

2. *Vérifier que*

$$xRy \Leftrightarrow (|x^2 - 1| - |y^2 - 1|)(|x^2 - 1| + |y^2 - 1| - 2) = 0$$

3. *En utilisant la question 2 calculer la classe d'équivalence de 0 : cl(0)*

Exercice 4: (05 points)

On munit $\mathbb{R} - \{-2\}$ de la loi de composition interne $*$ *définie par:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{-2\}, \quad x \ * \ y = x + y + \tfrac{xy}{2}$$

1. *Montrer que* $*$ *est une loi commutative.*

2. *Donner l'élément neutre ainsi que l'élément symétrique de* $*$