Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département d'Informatique

Calulatries et téléphones portables sont stritement interdits

Examen Final du module Algèbre 1 (2023-2024)
Durée: 1h30mn - 11/01/2024

Exercice 1: (04 points)

1. *Définir l'ensemble* $3\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$ *est-il un sous groupe de* $(\mathbb{Z}, +)$? *Justifier votre réponse.*

2. *Ecrire la table de multiplication de* $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \dot{\times})$ *et donner les éléments qui ne sont pas inversibles.*

3. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *est-il un anneau intègre? Justifier votre réponse.*

Exercice 2: (06 points)

Soit f *l'application définie par:* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x - 3.$

1. f *est-elle injective? surjevctive? bijective? Justifier votre réponse.*

2. D*éterminer* $f([3, 5])$.

3. *Montrer que l'application* $g : [-2, +\infty[\to [-7, +\infty[$ *définie par* $g(x) = f(x)$ *est bijective.*

Exercice 3: (05 points)

On définit dans $\mathbb{R}$ *la relation* $\Re$ *par:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\Re y \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2 = 2|x^2 - 1| - 2|y^2 - 1|$$

1. *Montrer que* $\Re$ *est une relation d'équivalence sur* $\mathbb{R}$

2. *Vérifier que*

$$xRy \Leftrightarrow (|x^2 - 1| - |y^2 - 1|)(|x^2 - 1| + |y^2 - 1| - 2) = 0$$

3. *En utilisant la question 2 calculer la classe d'équivalence de 0 : cl(0)*

Exercice 4: (05 points)

On munit $\mathbb{R} - \{-2\}$ de la loi de composition interne $*$ *définie par:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{-2\}, \quad x \ * \ y = x + y + \frac{xy}{2}$$

1. *Montrer que* $*$ *est une loi commutative.*

2. *Donner l'élément neutre ainsi que l'élément symétrique de* $*$

Corrigé Examen final Algèbre1 (2023-2024)

Exercice 1: (04 points)

1.

$$3\mathbb{Z} = \{3k/k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$$ **(0.5)**

$3\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, en effet:
(i) $0_{\mathbb{Z}} = 0 = 3 \times 0 \in 3\mathbb{Z}$.
(ii) Soient $x = 3k, y = 3k' \in 3\mathbb{Z}$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$

$$x + (-y) \in 3\mathbb{Z}?$$

(01)

On a:

$$x + (-y) = 3k - 3k' = 3\left(k - k'\right) = 3k'' \in 3\mathbb{Z}, \text{ avec } k'' = k - k' \in \mathbb{Z}$$

Alors, $x + (-y) \in 3\mathbb{Z}$.
De (i) et (ii) on déduit que $3\mathbb{Z}$ *est un sous groupe de* $(\mathbb{Z}, +)$.

2. On a:

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}\right\}$$

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

(01)

Les éléments qui ne sont pas inversibles: $\dot{2}$ **(0.5)**

3. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas un anneau intègre, car 4 n'est pas premier $\left(\left(\dot{2}\right)\dot{\times}\left(\dot{2}\right) = \dot{0}\right)$ **(01)**

Exercice 2: (06 points)

Soit f l'application définie par: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x - 3$

1. Surjective?

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$$ **(0.5)**

Soit $y \in \mathbb{R}$, on cherche un élément x de $\mathbb{R}$ s'il existe tel que $y = f(x)$.
On a:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3 - y = 0$$

On a

$$\Delta = 4(7 + y)$$

Pour $y < -7$. L'équation n'admet pas de solutions, par exemple $y = -8$. Donc l'élément y n'a pas d'antécédent. Alors, f n'est pas une application surjective. **(01)**

Injective?

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \textbf{(0.5)}$$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4) = 0.$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad \text{ou } x_1 + x_2 + 4 \neq 0 \qquad \textbf{(01)}$$

Donc, on peut trouver deux éléments différents ont même image. Par exemple pour $x_1 = 0$ et $x_2 = -4$,on a: $f(x_1) = f(x_2) = -3$.
Alors, f n'est pas une application injective.

Bijective?

Comme l'application f n'est ni surjective, ni injective, alors f n'est pas bijective. **(0.5)**

2. Par définition, on a:

$$f([3,5]) = \{f(x) \in \mathbb{R} / \quad x \in [3,5]\}$$

On a:

$$f(x) = x^2 + 4x - 3 = (x+2)^2 - 7,$$

donc,

$$3 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow 5 \leq x + 2 \leq 7$$

$$\Leftrightarrow 25 - 7 \leq (x+2)^2 - 7 \leq 49 - 7 \qquad \textbf{(01)}$$

$$\Leftrightarrow 18 \leq f(x) \leq 42$$

alors,

$$f([3,5]) = [18, 42]$$

3. Montrer que l'application $g : [-2, +\infty[\rightarrow [-7, +\infty[$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective.

$$\forall y \in [-7, +\infty[, \exists! x \in [-2, +\infty[, y = g(x) \qquad \textbf{(0.5)}$$

Soit $y \in [-7, +\infty[$, on cherche un élément x de $[-2, +\infty[$ s'il existe tel que $y = g(x)$.
On a:

$$y = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3 - y = 0$$

On a

$$\Delta = 4\,(7 + y) \geq 0.$$

Pour $y = -7$, on a $\Delta = 0$, donc $x = -2$.
Pour $y > -7$, on a $\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions **(01)**

$$x_1 = -2 - \sqrt{7 + y} \notin [-2, +\infty[$$

$$x_2 = -2 + \sqrt{7 + y} \in [-2, +\infty[$$

Alors, l'équation admet une seule solution dans $[-2, +\infty[$. Ce qui montre que l'application g est bijective.
Ou bien, on peut utiliser le théorème de la bijection.
Exercice 3: (05 points)
On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\Re$ par:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\Re y \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2 = 2|x^2 - 1| - 2|y^2 - 1|$$

1. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$
(i) Réfléxive: $\forall x \in \mathbb{R}, x\Re x$
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)^2 = 0 = 2|x^2 - 1| - 2|x^2 - 1| \Rightarrow x\Re x$$ **(0.5)**

Alors, $\Re$ est réflexive.
(ii) **Symétrique:** $\forall x, y \in \mathbb{R}, x\Re y \Rightarrow y\Re x$
Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a:

$$x\Re y \Rightarrow (x^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2 = 2|x^2 - 1| - 2|y^2 - 1|$$

$$\Rightarrow (y^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)^2 = 2|y^2 - 1| - 2|x^2 - 1|$$ **(0.5)**

$$\Rightarrow y\Re x$$

Alors, $\Re$ est symétrique.
(iii) **Transitive:** $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,($x\Re y$ et $y\Re z$)$\Rightarrow x\Re z$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a:

$$(x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow \begin{cases} (x^2-1)^2-(y^2-1)^2 = 2|x^2-1|-2|y^2-1| \\ (y^2-1)^2-(z^2-1)^2 = 2|y^2-1|-2|z^2-1| \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)^2-(y^2-1)^2+(y^2-1)^2-(z^2-1)^2 = 2|x^2-1|-2|y^2-1| +2|y^2-1|-2|z^2-1|$$

$$\Rightarrow (x^2-1)^2-(z^2-1)^2 = 2|x^2-1|-2|z^2-1|$$ **(0.5)**

$$\Rightarrow x\Re z$$

Alors, $\Re$ est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\Re$ est une relation d'équivalence.

2. Vérifier que

$$xRy \Leftrightarrow (|x^2-1|-|y^2-1|)(|x^2-1|+|y^2-1|-2) = 0$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a:

$$xRy \Leftrightarrow (x^2-1)^2-(y^2-1)^2 = 2|x^2-1|-2|y^2-1|$$

$$\Leftrightarrow |x^2-1|^2-|y^2-1|^2-2\left(|x^2-1|-|y^2-1|\right) = 0$$ **(01.5)**

$$\Leftrightarrow \left(|x^2-1|-|y^2-1|\right)\left(\left(|x^2-1|+|y^2-1|\right)-2\left(|x^2-1|-|y^2-1|\right) = 0\right.$$

$$\Leftrightarrow \left(|x^2-1|-|y^2-1|\right)\left(|x^2-1|+|y^2-1|-2\right) = 0$$

3. En utilisant la question 2 calculer la classe d'équivalence de 0 : cl(0)

On a:

$$Cl\,(0) = \{y \in \mathbb{R} \;\; / \;\; 0\Re y\}$$ **(0.5)**

$$= \left\{y \in \mathbb{R} \;\; / \;\; 1-(y^2-1)^2 = 2-2|y^2-1|\right\}.$$

D'après (2), on a

$$Cl\,(0) = \left\{y \in \mathbb{R} \;\; / \;\; \left(1-|y^2-1|\right)\left(1+|y^2-1|-2\right) = 0\right\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R} \;\; / \;\; \left(1-|y^2-1|\right)\left(|y^2-1|-1\right) = 0\right\}$$

$$= \left\{y \in \mathbb{R} \;\; / \;\; |y^2-1| = 1\right\}$$

$$|y^2-1|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-1=1 \text{ si } y\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\\ \\ -y^2+1=1 \text{ si } y\in[-1,1] \end{cases}$$ **(01.5)**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{2} \\ \\ y=0 \end{cases}$$

donc,

$$Cl\,(0)=\left\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right\}$$

Exercice 4: (05 points)
On munit $\mathbb{R}-\{-2\}$ de la loi de composition interne $*$ définie par:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{-2\}\,,\quad x\ *\ y=x+y+\tfrac{xy}{2}$$

1. Montrer que $*$ est une loi commutative.

$$\forall x,y\in\mathbb{R}-\{-2\}\,,\quad x*y=y*x$$

Soient $x,y\in\mathbb{R}-\{-2\}$, on a: **(01)**

$$x\ *\ y=x+y+\tfrac{xy}{2}=y+x+\tfrac{yx}{2}=y*x,$$

donc, $*$ est commutative.
2. La loi $*$ est admet un élément neutre si

$$\exists e\in\mathbb{R}-\{-2\}\,,\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}\,,\ x*e=e*x=x.$$ **(0.5)**

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$, on a

$$x*e=x\Leftrightarrow x+e+\tfrac{xe}{2}=x$$

$$\Leftrightarrow e\left(1+\tfrac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow e=0 \quad \text{car} \quad x\neq-2$$ **(01.5)**

et comme la loi $*$ est commutative, alors $*$ admet un élément neutre $e=0$.
L'élément x de $\mathbb{R}-\{-2\}$ admet un symétrique dans $\mathbb{R}-\{-2\}$ si

$$\exists x'\in\mathbb{R}-\{-2\}\,,x*x'=x'*x=e.$$ **(0.5)**

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-2\}$, on cherche un élément x' dans $\mathbb{R}-\{-2\}$ tel que $x*x'=x'*x=e$.

On a:

$$x * x' = e \Leftrightarrow x + x' + \frac{xx'}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x'\left(1 + \frac{x}{2}\right) = -x$$

$$\Leftrightarrow x' = -\frac{2x}{2+x}, \quad \text{car} \quad x \neq -2$$

$x' = -\frac{2x}{2+x} \in \mathbb{R} - \{-2\}$?

Supposons $x' = -2$ **(01.5)**

$$x' = -2 \Leftrightarrow -\frac{2x}{2+x} = -2$$

$$\Leftrightarrow -2x = -4 - 2x \Leftrightarrow 0 = -4$$

Ce qui donne une contradiction, alors d'apres le raisonnement par l'absurde, on déduit que

$$x' \neq -2$$

et comme la loi $*$ est commutative, alors l'élément $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ admet un symétrique $x' = -\frac{2x}{2+x}$ dans $\mathbb{R} - \{-2\}$.