ESPACE VECTORIEL

0.1 Somme de sous espaces vectoriels

Définition 1
Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux s.e.v de E. On définit l'ensemble $F_1 + F_2$ comme suit

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 / (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\}.$$

Exemple 1
Soient E, F deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3y = 0\}$$

On a, par exemple $u = (1, 1, 0) \in E$ et $v = (3, 1, 1) \in F$. Donc $u + v = (4, 2, 1) \in E + F$.
Est ce que le vecteur $w = (2, 0, 1) \in E + F$? C'est-à-dire est ce que on peut trouver deux vecteurs $X = (x, y, z) \in E$ et $Y = \left(x', y', z'\right) \in F$ tels que $w = X + Y$.
On résout l'équation vectorielle $w = X + Y$.

$$w = X + Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2z + 3y' = 2 \\ y + y' = 0 \\ z + z' = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2z + 3y' = 2 \\ y = -y' \\ z = -z' + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y' - 2\left(-z' + 1\right) + 3y' = 2 \\ y = -y' \\ z = -z' + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 2 - z' \\ y = z' - 2 \\ z = -z' + 1 \end{cases}$$

Donc,

$$X = \left(3z' - 4, z' - 2, -z' + 1\right) \quad \text{et} \quad Y = \left(6 - 3z', 2 - z', z'\right).$$

Proposition 1
Soient E un $\mathbb{k}-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux s.e.v de E. *Alors, $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.*
Preuve :
Notons
$$F = F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2; (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\}.$$

(i)- $F_1 + F_2 \neq \varnothing$, en effet,
$$0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2.$$

(ii)- Soient $u, v \in F_1 + F_2$. Donc, $\exists\,(x_1, x_2) \in F_1 + F_2$ et $\exists\,(y_1, y_2) \in F_1 + F_2$ tels que
$$u = x_1 + x_2 \quad et \quad v = y_1 + y_2.$$

On a alors :
$$u + v = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)$$
$$= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in F_1 + F_2,$$
d'où $u + v \in F_1 + F_2$.
(iii)- Soient $\lambda, \in \mathbb{k}$ et $u \in F_1 + F_2$. Donc, $\exists\,(x_1, x_2) \in F_1 + F_2$ tel que
$$u = x_1 + x_2.$$

Alors,
$$\lambda u = \lambda\,(x_1 + x_2)$$
$$= (\lambda x_1) + (\lambda x_2) \in F_1 + F_2,$$
d'où $\lambda u \in F$.
D'après (i) ,(ii) et (iii) on déduit que $F_1 + F_2$ *est un sous-espace vectoriel de E.*
Proposition 2
Soient F_1, F_2 deux s.e.v d'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel E et B_1 une famille génératrice de F_1 et B_2 une famille génératrice de F_2. Alors $B_1 \cup B_2$ est une famille génératrice de $F_1 + F_2$.
$$F_1 + F_2 = Vect\,(B_1 \cup B_2).$$

Définition 2 (Somme directe)
Soient F_1, F_2 deux s.e.v d'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel E. On dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe (ou que F_1 et F_2 sont en somme directe) et on note $F_1 \oplus F_2$, si tout vecteur X de $F_1 + F_2$ *s'écrit d'une manière unique sous la forme $X = u + v$ avec $u \in F_1$ et $v \in F_2$.*
Proposition 3
Soient F_1, F_2 deux s.e.v d'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel E.
La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Définition 3 (Sous espaces supplémentaires)
Soient F_1, F_2 deux s.e.v d'un $\mathbb{k}-$espace vectoriel E. On dit que F_1 et F_2 sont supplimentaires dans E si $F_1 \oplus F_2 = E$ C'est à dire $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et *$F_1 + F_2 = E$.*
Autrement dit : *F_1 et F_2 sont supplimentaires dans E si tout vecteur X* de *E s'écrit d'une manière unique sous la forme $X = u + v$ avec $u \in F_1$ et $v \in F_2$.*

Exemple 2
Soient F et G deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ tels que :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \ \}$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0 \ \}$$

On a :
(a) $\underline{E \cap F = 0_{\mathbb{R}^3}}$: Soit $k = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$k = (x, y, z) \in F \cap G \Leftrightarrow (k = (x, y, z) \in F \quad \text{et} \quad k = (x, y, z) \in G)$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z = 0 \text{ et } x = y = 0 \ )$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \\ x = y = 0 \end{cases}$$

On obtient :

$$z = x = y = 0$$

Alors, le seul vecteur de $E \cap F$ est le vecteur nul, donc $E \cap F = 0_{\mathbb{R}^3}$.
(b) $\underline{F + G = \mathbb{R}^3}$: il faut montrer que n'importe quel vecteur $u_3 = (x_3, y_3, z_3)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme : $u_3 = (x_3, y_3, z_3) = u_1 + u_2 = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$ où $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in F$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in G$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ y_3 = y_1 + y_2 \\ z_3 = z_1 + z_2 \\ x_1 + y_1 + z_1 = 0 \\ x_2 = y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ y_3 = y_1 + y_2 \\ z_3 = z_1 + z_2 \\ z_1 = -x_1 - y_1 \\ x_2 = y_2 = 0 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ y_1 = y_3 \\ z_1 = -x_3 - y_3 \\ x_2 = y_2 = 0 \\ z_2 = x_3 + y_3 + z_3 \end{cases}$$

De (a) et (b) on déduit que : $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

0.2 Espace Vectoriel de Dimension Finie

0.2.1 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 4
On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension fini s'il possède une famille génératrice finie (Une famille génératrice ayant un nombre fini de vecteurs). Dans le cas contraire, on dit qu'il est de dimension infinie.

Théorème 1
Soit E un $\mathbb{k}$ espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont même cardinall n.

Définition 5
Ce cardinal n est la dimension de l'espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{k}$, on note $\dim E$.
Par convention, si $E = \{0_E\}$, on note $\dim E = 0$.

Si F est un sous espace vectoriel d'un $\mathbb{k}$ espace vectoriel E, alors

$$\dim F \leq \dim E.$$

Exemple 3
♦ Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\dim E = n.$$

♦ Soient $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\dim E = 2.$$

♦ Soient $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{k} = \mathbb{C}$

$$\dim E = 1.$$

♦ Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{k} = \mathbb{R}$

$$\dim E = n + 1.$$

Proposition 4
Soit E un $\mathbb{k}$ espace vectoriel de dimension finie n.
- Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.
- Toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.
Cette proposition permet de prouver qu'une famille est une base sans avoir à vérifier les deux axiomes (libre et génératrice).

Exemple 4
Soit $B = \{u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (0, 0, 3), u_3 = (1, 0, 5)\}$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On a :
(i) Le cardinal de B égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$

$$Card(B) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

(ii) La famille B est libre, car pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Alors, d'aprés (i) et (ii) on déduit que la famille B forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 5
Soit E un $\mathbb{k}$ espace vectoriel de dimension finie n.
★ *Toute famille libre de E possède au maximum n éléments.*
★ *Toute famille génératrice de E possède au minimum n éléments.*

Exemple 5
Soient les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes

$$B_1 = \{u_1 = (1, 0, 3), u_2 = (0, 4, 1)\}$$

$$B_2 = \{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 3, -2), v_4 = (3, 1, 1)\}$$

On a :
La famille B_1 n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, car B_1 a deux éléments est on sait que la famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ doit contenir au minimum trois éléments.
La famille B_2 n'est pas libre, car B_2 a quatre éléments est on sait que une partie libre de $\mathbb{R}^3$ doit contenir au maximum trois éléments.

Théorème 2 (Théorème de la base incomplète)
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $B = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ une famille libre avec $p < n$.
On peut complèter la famille B par $n - p$ vecteurs de E pour former une base de E.
Théorème 3
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E $(F \subset E)$.
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
et de plus

$$E = F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$$

Théorème 4
Soient F_1, F_2 sont deux sous espaces vectoriels de dimension finies d'un espace vectoriel E.
Alors $F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont de dimension finie et

$$\dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$$

Proposition 6
Soient F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Si F_1 et F_2 sont supplimentaire dans E, alors $\dim(F_1 + F_2) = \dim E$.
Proposition 7
Soient F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. On a :

$$F_1 \oplus F_2 = E \Longleftrightarrow \begin{cases} \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E \\ \\ F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \end{cases}$$

0.2.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient E un espace vectoriel, $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une base de E et u un vecteur de E. Ce vecteur s'écrit de manière unique sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

Les nombres λ_i sont appelés les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{F}$.

Exemple 6
On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$B = \{u_1 = (1,1,3), u_2 = (0,2,1), u_3 = (-1,4,0)\}$$

Cette famille forme une base de $\mathbb{R}^3$, car elle est libre et de plus $CardB = \dim \mathbb{R}^3$.
On cherche les coordonnées du vecteur $X = (4,7,11)$ dans la base B. Donc il faut résoudre l'équation vectorielle suivante

$$X = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 sont des scalaires.
Alors, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_3 = 4 & .... (1) \\ \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 7 & ...... (2) \\ \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 11 & .... (3) \end{cases}$$

De l'équation (1), on trouve

$$\lambda_3 = \lambda_1 - 4$$

et de l'équation (3), on trouve

$$\lambda_2 = -3\lambda_1 + 11$$

On remplace λ_2 et λ_3 dans l'équation (2), on obtient

$$\lambda_1 - 6\lambda_1 + 22 + 4\lambda_1 - 16 = 7$$

ce qui donne

$$\lambda_1 = -1$$

Alors,

$$\lambda_2 = 14 \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -5$$

Donc, les coordonnées du vecteur X dans la base B sont $-1, 14$ et -5.

0.3 Rang

0.3.1 Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 6
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle rang de cette famille et on note $rg(\mathcal{F})$ la dimension de $Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Exemple 7
Soit $\mathcal{F} = \{u_1 = (1,2,3), u_2 = (0,0,3), u_3 = (1,-4,2), u_4 = (2,-2,2)\}$ une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On a

$$rg(\mathcal{F}) = 3$$

En effet,

$$Vect(u_1, u_2, u_3, u_4) = Vect(u_1, u_2, u_3)$$

car

$$u_4 = u_1 - u_2 + u_3$$

et on a $\{u_1 = (1,2,3), u_2 = (0,0,3), u_3 = (1,-4,2)\}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 8
1. La famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $rg(\mathcal{F}) = n$.
2. La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E si et seulement si $rg(\mathcal{F}) = \dim E$.
Preuve :
Notons $F = Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$, alors $rg(\mathcal{F}) = \dim F$
1. Si la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est libre, comme elle est génératrice de F, c'est une base de F donc son cardinal n est la dimension de F : $n = rg(\mathcal{F})$.
Riciproquement, si $n = rg(\mathcal{F})$, alors $n = \dim F$ donc la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est génératrice de F. Alors elle forme une base ce qui montre que la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est libre.
2. Si la famille est génératrice de E, alors $E = F$ d'où $\dim E = \dim F$ et $rg(\mathcal{F}) = \dim E$.
Si $rg(\mathcal{F}) = \dim E$, alors $\dim E = \dim F$ et comme de plus, on sait que $F \subset E$, on obtient $E = F$, donc $E = Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$, alors la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est génératrice de E.