I. ANALYSE COMBINATOIRE

I.1 INTRODUCTION

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques où on s'intéresse à l'étude de problèmes de dénombrements d'ensembles finis.

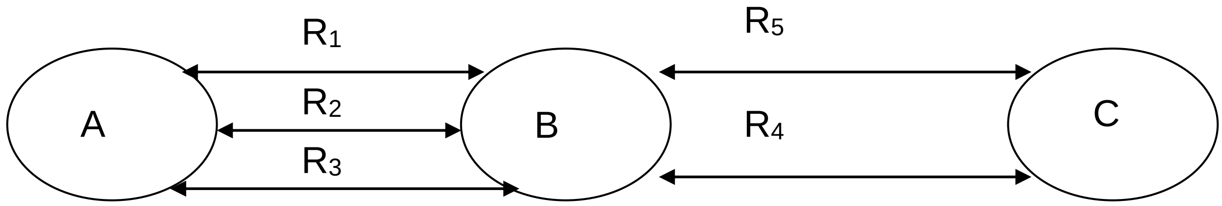
I.2 PRINCIPE DE L'ADDITION

Si une opération O_1 peut être effectuée de n_1 manières différentes, une opération O_2 peut être effectuée de n_2 manières différentes et ainsi de suite jusqu'à une opération O_k qui peut être effectuée de n_k manières différentes.

Alors le nombre de manières différentes d'effectuer **<u>l'une ou l'autre</u>** de ces opérations est

$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

Exemple : On se donne le réseau routier suivant reliant trois villes A, B et C.



Pour un individu se trouvant dans la ville B, combien y a-t-il de façons différentes pour quitter cette ville?

Soient les opérations suivantes:

O : « quitter B » , O_1 : « quitter B vers A » , O_2 : « quitter B vers C »

On a : $O \Leftrightarrow O_1 \vee O_2$

$n_1 = 3$ manières pour réaliser O_1 , $n_2 = 2$ manières pour réaliser O_2

Le nombre de manières d'effectuer l'opération O est : $N = n_1 + n_2 = 3 + 2 = 5$

I.3 PRINCIPE DE LA MULTIPLICATION

Soit une première opération O_1 qui peut être effectuée de n_1 manières différentes. Si pour chacune de ces n_1 manières, une deuxième opération O_2 peut être effectuée de n_2 manières différentes. Si pour chacune de ces $n_1 \times n_2$ manières différentes pour effectuer O_1 et O_2 , une troisième opération O_3 peut être effectuée de n_3 manières différentes. Et ainsi de suite jusqu'à la k ième opération O_k qui peut être réalisée de n_k manières différentes pour chacune des manières de réaliser les opérations précédentes.

Alors **<u>l'ensemble de ces opérations</u>** peut être effectué de $N = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ manières différentes.

I.4 NOTION DE FACTORIELLE

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit factorielle n, notée n!, par : $n! = n.(n-1)(n-2)\ldots 2.1$

Par convention, on prend : $0! = 1$

On a : $n! = n.(n-1)!$

I.5 ARRANGEMENTS

On considère un ensemble E de n éléments (n fini) et soit une suite (une disposition) de p éléments choisis parmi les éléments de l'ensemble E.
Cette suite peut être ordonnée ou non selon qu'on tient compte de la position des éléments ou non.
Elle peut se faire avec ou sans répétition selon que l'on puisse utiliser le même élément plusieurs ou une seule fois.

Définition

Soit E un ensemble contenant n éléments différents (n fini). On appelle arrangement sans répétition de p éléments ($0 \le p \le n$) toute suite ordonnée de p éléments <u>différents</u> choisis dans E.
Le nombre d'arrangements sans répétition est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Remarque : l'ordre est important.

Définition

Soit E un ensemble contenant n éléments différents (n fini). On appelle arrangement avec répétition de p éléments (p quelconque) toute suite ordonnée de p éléments <u>quelconques</u> de E.
Le nombre d'arrangements avec répétition est :

$$\mathscr{A}_n^p = n^p$$

Exemple

Dans un club de 10 personnes, on veut choisir un comité qui comprend un président, un secrétaire et un trésorier. Le cumul est exclu. De combien de manière peut-on choisir ce comité ?
Puisqu'il y a des charges, chaque comité est un arrangement et comme le cumul est exclu alors se sont des arrangements sans répétition.

On a alors $A_{10}^3 = \dfrac{10!}{(10-3)!} = 720$ comités possibles

I.6 PERMUTATIONS

Définition

On appelle permutation toute suite ordonnée des n éléments de l'ensemble E.
Remarque : Une permutation est donc un arrangement particulier où p = n (tous les éléments de E)
Le nombre de permutations différentes est : $P_n = n!$

Exemple 1

Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot DIPLOMES
n = 8 , le nombre de mots différents est : $N = P_8 = 8! = 40\ 320$

Exemple 2

De combien de manières peut-on ranger, sur une étagère, 4 livres de maths, 3 livres de physiques et 2 livres de chimie ?
Il y a N = 9! = 362 880 manières différentes

Permutations dans le cas où certains éléments de l'ensemble E sont identiques:

Soient n_1 éléments d'une certaine sorte, n_2 éléments d'une autre sorte, et ainsi de suite jusqu'à n_k éléments qui sont d'une sorte différente. Alors le nombre de permutations différentes est

$$\mathscr{P}_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Exemple:

Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot STATISTIQUES
n = 12 , n_1=3 (3 S) , n_2 =3 (3T) , n_3 = 2 (2I)

le nombre de mots différents est : $\mathscr{P}_{12}^{3,3,2} = \dfrac{12!}{3!3!2!} = 6\ 652\ 800$

I.7 COMBINAISONS

Définition

On appelle combinaison sans répétition de p éléments ($0 \le p \le n$) toute suite non ordonnée de p éléments différents choisis parmi les éléments de E.

Le nombre de combinaisons différentes est : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Propriétés

$C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$, , $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

Définition

On appelle combinaison avec répétitions de p éléments (p quelconque) toute suite non ordonnée de p éléments quelconques pris parmi les éléments de E.

Il y en a : $K_n^p = \dfrac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

Exemple

A partir d'un groupe de 5 hommes et de 7 femmes, combien de comités différents composés de 2 hommes et de 3 femmes peut-on former?

Il n'y a pas ordre $C_5^2 C_7^3 = 10 \times 35 = 350$ comités possibles

II. CALCUL DE PROBABILITES

II.1 Expériences aléatoires et Evènements : une expérience ou épreuve est dite aléatoire s'il est impossible de prévoir son résultat.

L'ensemble de tous les résultats possibles est appelé univers ou ensemble fondamental de l'expérience, il est en général connu. On le note Ω.

Exemples

1. On lance une pièce de monnaie. L'univers de cette épreuve aléatoire est: $\Omega = \{ \text{pile} , \text{face} \}$
2. On lance un dé. $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
3. On lance deux dés. $\Omega = \{ (1,1),(1, 2),. . . , (6, 6) \} = \{ (i , j) / i , j \in \mathrm{IN} \text{ et } 1 \le i , j \le 6\}$

Les sous-ensembles de Ω sont appelés les évènements.

$\varnothing$ est appelé évènement impossible.

Ω est l'évènement certain.

Chaque partie de Ω contenant un seul élément (un seul résultat possible) est appelée évènement élémentaire.

Exemple

On lance deux dés. $\Omega = \{ (1,1),(1, 2),. . . , (6, 6) \}$

Soit l'évènement A : « la somme des points obtenus est >10 »

$A = \{ (5,6),(6, 5),(6, 6) \}$

Soit l'évènement B : « la somme des points obtenus est égale à 1 »

$B = \varnothing$

Rq. Un évènement est une partie de Ω définie par une proposition logique.

Définitions

Soient A et B deux évènements de Ω.

- L'évènement $A \cup B$ est l'évènement qui est réalisé si A est réalisé ou B est réalisé.
- L'évènement $A \cap B$ est l'évènement qui n'est réalisé que si A et B sont réalisés simultanément.
- Si A est évènement de Ω. L'évènement contraire de A, noté $\overline{A}$, est l'évènement qui n'est réalisé que si A ne l'est pas.
- Si $A \cap B = \varnothing$ alors on dira que A et B sont deux évènements incompatibles.

Propriétés $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

II.2 Notion de probabilité

Définition

Soient Ω l'ensemble fondamental associé à une épreuve aléatoire. Une probabilité P définie sur Ω est une application de $\mathscr{P}(\Omega)$ (ensemble de toutes les parties de Ω) dans IR vérifiant :

i. $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega)$: $0 \leq P(A) \leq 1$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. $\forall (A_i) \subset \mathscr{P}(\Omega)$: $P(\cup A_i) = \Sigma P(A_i)$ si les évènements A_i sont deux à deux disjoints (c.a.d. pour $i \neq j$: $A_i \cap A_j = \emptyset$)

Conséquences : si P est une probabilité sur Ω, on a alors :

$P(\emptyset) = 0$

$\forall A \in \mathscr{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$\forall A, B \in \mathscr{A}$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

II.3 Notion d'équiprobabilité : l'équiprobabilité correspond au cas où tous les évènements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser. c.a.d si $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n \}$ alors $P(\{ \omega_i \}) = 1/n$.

Dans ce cas d'équiprobabilité, si A est un évènement quelconque alors :

$$P(A) = \frac{\textit{le nombre de cas favorables à } A}{\textit{le nombre de cas possibles}} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Exemples:

- on lance un dé bien équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre premier?
- On lance deux dés bien équilibrés. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10?
- On tire 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir dans la main exactement deux dames ?

III. Probabilité Conditionnelle - Théorème de Bayes

III.1 Exemple :

1. On tire, au hasard, une carte d'un jeu de 52 cartes. On s'intéresse à l'évènement A : « la carte tirée est un Valet ». Calculer la probabilité de A.

On a $P(A) = \frac{\textit{le nombre de cas favorables à } A}{\textit{le nombre de cas possibles}} = \frac{C_4^1}{C_{52}^1} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 0.077$

2. Après avoir tiré la carte, on a vu du coin de l'œil, que la carte tirée était une figure noire. Etant donnée cette information, calculer la probabilité de A.

Cette information change la probabilité de A car il ne reste que deux valets noirs comme résultats favorables à A et ils constituent 2 des 6 résultats possibles (les 6 figures noires). La probabilité cherchée devient donc

$$\frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333$$

En effet, si on appelle B l'évènement « la carte tirée est une figure noire », on a alors P(B)= 6/52=3/26

Lorsque B est réalisé, cet évènement devient l'ensemble des résultats possibles c.a.d. le nouveau ensemble fondamental et la probabilité que A se réalise est : $\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{2/52}{6/52} = 1/3 = 0.333$

III.2 Probabilité conditionnelle

Définition

Si A est un évènement associé à une épreuve aléatoire et si B est un évènement de probabilité non nulle associé à la même épreuve, on définit alors la probabilité conditionnelle que A se réalise étant donné que B est réalisé, notée P(A/B), par $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

De cette définition, on a : $P(A\cap B) = P(A/B).\ P(B)$

On a aussi : $P(A\cap B) = P(B/A).\ P(A)$ (si $p(A)\neq 0$)

III.3 Indépendance

On dira que l'évènement A est indépendant de l'évènement B si et seulement si la réalisation de B ne change rien aux chances (à la probabilité) de réalisation de A. c.a.d. $P(A/B) = P(A)$

On démontre que A indépendant de B si et seulement si B est indépendant de A. On dira tout simplement que A et B sont indépendants.

A indépendant de B $\Leftrightarrow$ $P(A/B) = P(A)$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = p(B)$$

$\Leftrightarrow$ B est indépendant de A

On a donc : $\boxed{\text{A et B sont indépendants} \Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A).P(B)}$

Attention :

1) indépendants ≠ incompatibles.

Exercice

30 % des étudiants de la 1^e^ année MIAS ont échoué au cours de Probabilités, 20 % ont échoué au cours d'Analyse et 10 % ont échoué aux deux cours. On rencontre un étudiant au hasard. Calculer :

1. la probabilité que cet étudiant ait réussi le cours de Probabilités et échoué au cours d'Analyse.
2. la probabilité que cet étudiant ait échoué au cours d'Analyse sachant qu'il a échoué au cours de Probabilités.
3. la probabilité que cet étudiant ait échoué au cours d'Analyse sachant qu'il a réussi au cours de Probabilités.

Solution : Soit les événements suivants :

A : « l'étudiant a échoué au cours d'analyse »

B : « l'étudiant a échoué au cours de probabilités »

On a : $P(A)=0{,}2$; $P(B)=0{,}3$ et $P(A\cap B)=0{,}1$

1. On cherche $P(A\cap \overline{B})$

$B=(A\cap B)\cup (A\cap \overline{B})$ alors $P(B)= P((A\cap B)\cup (A\cap \overline{B}))=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$ car $(A\cap B) \cap (A\cap \overline{B})=\varnothing$

Et donc $P(A\cap \overline{B})= P(B) - P(A\cap B) = 0{,}3 -0{,}1 = 0{,}2$

2. On cherche $P(A/B)$

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$

3. On cherche $P(A/\overline{B})$

$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}2}{1-0{,}3} = \frac{2}{7}$

III.4 Théorèmes de Bayes

Définition

Soit (A_i) une suite d'évènements associés à une épreuve aléatoire. On dira que (A_i) forme un système complet d'évènements (SCE) de Ω si et seulement si on a :

- $\forall i : A_i \neq \emptyset$
- $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\Omega = \cup A_i$

1ère Formule de Bayes : Soit (A_i) un système complet d'évènements de Ω et soit B un évènement quelconque. On a alors :

$$P(B) = \sum_i P(B/A_i)P(A_i)$$

2ème Formule de Bayes: Soient (A_i) un système complet d'évènements de Ω et B un évènement de probabilité non nulle. Alors

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i).P(A_i)}{\sum_j P(B/A_j)P(A_j)}$$

Exemple : Une population est formée de 60% d'hommes et 40% de femmes. 80% des hommes et 70% des femmes fument.

1. Quelle est la proportion des fumeurs dans cette population ?
2. On tire au hasard une personne de cette population, elle fume. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?

1. On tire une personne au hasard de cette population et soient les évènements suivants

H « la personne tirée est un homme»

F « la personne tirée est un femme»

B « la personne tirée fume »

On cherche P(B)

{F , H} forme un SCE de Ω

P(B)= P(B/F).P(F)+P(B/H).P(H)

On a : P(F) = 0.4 , P(H) = 0.6 , P(B/F) = 0.7 , P(B/H) = 0.8

P(B)= 0.7 × 0.4 + 0.8 × 0.6 = 0.76

76 % de cette population sont des fumeurs.

2. On cherche P(H/B)

$$P(H/B) = \frac{P(B/H).P(H)}{P(B/H).P(H) + P(B/F).P(F)} = \frac{0.8 \times 0.6}{0.76} = 0.63$$

Exercice

Trois secrétaires tapent des adresses sur un lot d'enveloppes. La secrétaire **A** remplit **50%** des enveloppes, la secrétaire **B** en remplit **30%** et la secrétaire **C**, **20%**. La probabilité qu'il y ait une faute dans une adresse, si elle est tapée par la secrétaire **A**, est de **0,03**. La probabilité qu'il y ait une faute dans une adresse, si elle est tapée par la secrétaire **B,** est de **0,02**. La probabilité qu'il y ait une faute dans une adresse, si elle est tapée par la secrétaire **C,** est de **0,01**.

1. On tire une lettre au hasard, l'adresse est fausse. Quelle est la probabilité que cette adresse ait été tapée par la secrétaire **A**?

2. On tire une lettre au hasard. L'adresse est exacte. Quelle est la probabilité que cette adresse ait été tapée par la secrétaire **A**?

On tire une lettre au hasard, soit les événements suivants :

A : « la lettre est tapée par la secrétaire A »

B : « la lettre est tapée par la secrétaire B »

C : « la lettre est tapée par la secrétaire C »

F : « l'adresse est fausse »

A,B,C forment un système complet d'événements.

On a : P(A)=0,5 ; P(B)=0,3 et P(C)=0,2

P(F/A)=0,03 ; P(F/B)=0,02 et P(F/C)=0,01

1. On cherche P(A/F)

$$P(A/F)=\frac{P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{P(F/A)P(A)}{P(F/A)P(A)+P(F/B)P(B)+P(F/C)P(C)}=\frac{0{,}03.0{,}5}{0{,}03.0{,}5+0{,}02.0{,}3+0{,}01.0{,}2}=\frac{0{,}015}{0{,}023}=0{,}65$$

2. On cherche $P(A/\overline{F})$

$$P(A/\overline{F})=\frac{P(A\cap\overline{F})}{P(\overline{F})}$$

On a $A=(A\cap F)\cup(A\cap\overline{F})$

$P(A)=P(A\cap F)+P(A\cap\overline{F})$ donc $P(A\cap\overline{F})=P(A)-P(A\cap F)=0{,}5-0{,}015=0{,}485$

$$P(A/\overline{F})=\frac{0{,}485}{1-0{,}023}=0{,}496$$