MATRICES

0.1 Définitions

Définition 1 *Soient n, m deux entiers strictement positifs. Une matrice $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{k}$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{k}$ à n lignes et m colonnes, que l'on note*

$$(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2m} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Les a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice.
L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{k}$ est noté par $M_{n,m}(\mathbb{k})$.

Exemple 1 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A est une matrice à 3 lignes et 2 colonnes à coéfficients dans $\mathbb{R}$, donc $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$.
L'élément a_{32} se trouve dans la troisième ligne et deuxième colonne, donc $a_{32} = 4$.

Définition 2
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{k})$.
Si $n = m$, la matrice A est dite matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté par $M_n(\mathbb{k})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si $n = 1$, la matrice A est dite matrice ligne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1m} \end{pmatrix}$$

Si $m = 1$, la matrice A est dite matrice colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Définition 3
Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dont tous les éléments sont nul est appelée matrice nulle.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} = (0)$$

Définition 3
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée. Les éléments a_{ii} s'appellent les coefficients diagonaux de A.

Définition 4
On dit qu'une matrice est diagonale lorsquelle est carrée et que ses coefficients non diagonaux sont nuls. Elle est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & 0 \\ . & . & & & & \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 5
On dit qu'une matrice A est triangulaire supérieure (respectivement : inférieure) lorsquelle est carrée et que ses coefficients non diagonaux en dessous (respectivement : au dessus) de la diagonal sont nuls.
Matrice triangulaire supérieure : $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . & . & . \\ 0 & 0 & a_{33} & . & . & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure : $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i < j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & . & . \\ a_{31} & a_{11} & a_{33} & 0 & . & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & 0 \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 6
On appelle matrice identité d'ordre n, la matrice carrée d'ordre n dont les éléments de la diagonale sont égqux à 1 et tous les autres sont égaux à 0. On la note I_n.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.2 Matrice associée à une application linéaire

Dans cette section, E et F sont des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels de dimension finie. On pose $m = \dim E$ et $n = \dim F$. Soit $B_E = (u_1, u_2, ..., u_m)$ (respectivement $B_F = (v_1, v_2, ..., v_n)$) une base de E (respectivement F).

Définition 7
Soit f *une application linéaire de* E *dans* F. *La matrice de* f *dans les bases* B_E *et* B_F *notée* $M_{B_E,B_F}(f)$ *est la matrice à* n *ligne et* m *colonne à coefficients dans* $\mathbb{k}$, *dont les éléments de la j-ème colonne sont les coordonnées du vecteur* $f(u_j)$ *dans la base* B_F.

$$M_{B_E,B_F}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

avec

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \times v_i$$

Exemple 2
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (2x + y, x + y, 3y),$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
On consédère les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Soient $B_0 = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ et $B_1 = \{e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (0, 1, 0), e'_3 = (0, 0, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.
On a :

$$f(e_1) = (2, 1, 0) = 2 \times e'_1 + 1 \times e'_2 + 0 \times e'_3$$

donc les éléments de la première colonne sont $2, 1$ et 0. Alors

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$f(e_2) = (1,1,3) = 1 \times e'_1 + 1 \times e'_2 + 1 \times e'_3$$

donc les éléments de la deuxième colonne sont $1, 1$ et 3. Alors

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Alors, la matrice associée à l'application f dans les bases B_0 et B_1 est :

$$M_{B_0,B_1}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & \\ 1 & 1 \\ & \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 3
Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui même définie par

$$f(x,y) = (x+y, x-2y),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Déterminer la matrice associée à f dans la base

$$B = \{u_1 = (1,1), u_2 = (-1,2)\}$$

On a :

$$f(u_1) = (2,-1) = \alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha - \beta, \alpha + 2\beta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \\ \alpha + 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \\ \beta = -1 \end{cases}$$

donc les éléments de la première colonne sont 1 et -1. Alors

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{pmatrix},$$

et

$$f(u_1) = (1,-5) = \alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha - \beta, \alpha + 2\beta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \\ \alpha + 2\beta = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \\ \beta = -2 \end{cases}$$

donc les éléments de la deuxième colonne sont -1 et -2. Alors

$$C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Alors, la matrice associée à l'application f dans la base B est :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1

Soient f une application linéaire de E dans F et $A = M_{B_E,B_F}(f)$. Si $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \times u_i$ et si $f(u) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \times v_i$, alors on a :

$$Y = AX,$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ \alpha_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Exemple 4

Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, pour tous les réels x, y et z, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+3z \\ 2x+4y \\ 5x-3y+z \end{pmatrix}$$

Donc,

$$f(x,y,z) = (x+y+3z, 2x+4y, 5x-3y+z)$$

Proposition 2

Soient G un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie ($\dim G = p \geq 1$) et $B_G = (w_1, w_2, ..., w_p)$ une base de G.
Soient f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. On note $A = M_{B_E,B_F}(f)$ et $B = M_{B_F,B_G}(g)$. Alors la matrice de $g \circ f$ dans les bases B_E et B_G est la matrice BA.

$$M_{B_E,B_G}(g \circ f) = B \times A$$