MATRICES

0.1 Déterminant

0.1.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition 1
Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ *une matrice de* $M_2(\mathbb{k})$. *On appelle détermnant de* A*, le nombre noté* $\det A$ *ou* $|A|$

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Exemple 1
Soit

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=3\times 7-5\times 4=1.$$

0.1.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Définition 2
Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice de* $M_n(\mathbb{k})$. *On définit le détermnant de* A *comme suit :*

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\,a_{ij}\times|A_{ij}|$$

où A_{ij} *est la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Son déterminant* $|A_{ij}|$ *s'appelle le mineur de* a_{ij} *dans* A *et le nombre* $(-1)^{i+j}\times|A_{ij}|$ *est appelé cofacteur de* a_{ij} *dans* A.

Remarque 1
Pour calculer $\det A$. On peut développer suivant la j-ème colonne

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\,a_{ij}\times|A_{ij}|$$

Exemple 2
Soit

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Pour calculer $\det A$ on développe suivant la première ligne. Alors, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \times |A_{1j}|$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \right) - a_{12} \left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \right) + a_{13} \left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \right)$$

On peut développer suivant la 2-ème colonne

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+2} a_{i2} \times |A_{i2}|$$

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12} \left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \right) + a_{22} \left(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} \right) - a_{32} \left(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} \right)$$

Exemple 3
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

On peut développer suivant les lignes ou les colonnes. Développons selon la première ligne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \times |A_{1j}|$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \left((-1)(-3) - 5 \times 2 \right) - 2 \left(3(-3) - 4 \times 2 \right) + \left(3 \times 5 - 4(-1) \right) = 46$$

On peut vérifier le résultat si on développe suivant la 2-ème ligne ou la 3-ème ligne. Développons suivant la 3-ème ligne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{3+j} a_{3j} \times |A_{3j}|$$

$$= 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \left(2 \times 2 - (-1) \times 1 \right) - 5 \left(1 \times 2 - 3 \times 1 \right) - 3 \left(1 \times (-1) - 3 \times 2 \right) = 46$$

Développons selon la première colonne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \times |A_{i1}|$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= ((-1)(-3) - 5 \times 2) - 3(2(-3) - 5 \times 1) + 4(2 \times 2 - (-1) \times 1) = 46$$

On peut vérifier le résultat si on développe suivant la 2-ème colonne ou la 3-ème colonne. Développons suivant la 3-ème colonne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} a_{i3} \times |A_{i3}|$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3 \times 5 - 4 \times (-1)) - 2(1 \times 5 - 4 \times 2) - 3(1 \times (-1) - 3 \times 2) = 46$$

0.1.3 Les propriétes des déterminants

Propriété 1

Soient A et B deux matrices carrée d'ordre n. Alors, on a :

1. $\det(AB) = \det A \times \det B$

2. $\det A = \det({}^{t}A)$

3. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ Dans le cas où A est inversible

Propriété 2

Le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si les vecteurs lignes ou vecteurs colonnes sont liée.

Exemple 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

On a : $\det A = 0$ car la deuxième colonne est égale à 5 fois la première colonne. $\det B = 0$ car la deuxième ligne est le double de la première ligne.

Propriété 3

Si l'on échange deux lignes ou deux colonnes d'un déterminant, celui-ci change de signe en gardant la même valeur absolue.

Exemple 5

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -3 \qquad , \qquad \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

Propriété 4
Si on multiple une ligne (ou colonne) d'une matrice par un réel λ, le déterminant de la nouvelle matrice est multiplié par λ.
Exemple 6
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 9 = 3 \times \det A$$

Propriété 5
Si on ajoute à une ligne (ou colonne) un multiple d'une ligne (ou colonne), le déterminant ne change pas.
Exemple 7
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 10$$

On utilise la propriété (10) pour obtenir des 0 dans une ligne ou une colonne.
Si on ajoute à la deuxième linge, la première ligne multipliée par -1 ($C_2 \longrightarrow C_2 - C_1$) et à la troisième linge, la première ligne multipliée par -1 ($C_3 \longrightarrow C_3 - C_1$) et à la quatrième linge, la première ligne multipliée par -1 ($C_4 \longrightarrow C_4 - C_1$). On obtient :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ -3 & 6 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 7 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

Si on ajoute la première colonne multipliée par $\left(-\frac{1}{3}\right)$ à la deuxième colonne ($C_2 \longrightarrow C_2 - \frac{1}{3}C_1$) et la première colonne multipliée par $\left(-\frac{4}{3}\right)$ à la troisième colonne ($C_3 \longrightarrow C_3 - \frac{4}{3}C_1$), on obtient :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -1 \\ -2 & -\frac{7}{3} & \frac{11}{3} \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{7}{3} & \frac{17}{3} \end{vmatrix} = 3\left(\frac{17}{3} - \frac{7}{3}\right) = 10$$

Proposition 1
Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est inversible si $\det A \neq 0$. *Et de plus on a :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^{t}C$$

où C est la matrice de cofacteurs. $C = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *avec* $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$.

Exemple 8
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

on a : $\det A = 8 \neq 0$, donc la matrice A est inversible et on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^{t}C$$

On calcule les cofacteurs

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad c_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 29 \qquad c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13 \qquad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -17 \qquad c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \qquad c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

Alors, la matrice C est

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 29 & -13 & 2 \\ -17 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

par conséquent

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 29 & -17 \\ -1 & -13 & 8 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{29}{8} & -\frac{17}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{13}{8} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$