Corrigé de fiche TD 2 (ALG II)

2023 - 2024

Exercice 1:
1. Les vecteurs suivants forment ils une base de $\mathbb{R}^3$?
(a). $u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)$
Posons
$$F_1 = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,0)\}$$

F_1 est une famille de 3 éléments dans un espace de dimension 3, il suffit de savoir s'elle est libre ou génératrice.
Résolvons l'équation vectorielle suivante

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i = 0_{\mathbb{R}^3}$$

avec α_1, α_2 et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Donc, la famille F_1 est libre. On conclut que F_1 est une base de $\mathbb{R}^3$.
(b). $u_1 = (1,1,2), u_2 = (1,0,1), u_3 = (2,1,3)$
Posons
$$F_2 = \{u_1 = (1,1,2), u_2 = (1,0,1), u_3 = (2,1,3)\}$$

F_2 est une famille de 3 éléments dans un espace de dimension 3, il suffit de savoir s'elle est libre ou génératrice.
Résolvons l'équation vectorielle suivante

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i = 0_{\mathbb{R}^3}$$

avec α_1, α_2 et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & \ldots \text{ Eq}(1) \\ \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 & \ldots \text{ Eq}(2) \\ \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 & \ldots \text{ Eq}(3) \end{cases}$$

De l'équation Eq(2) on obtient

$$\alpha_1 = -\alpha_3$$

On remplace α_1 dans Eq(1) et Eq(3), on trouve:

$$\begin{cases} -\alpha_3 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \\ 2(-\alpha_3) + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3$$

Pour $\alpha_3 = -1$, on trouve $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et on a donc

$$u_1 + u_2 - u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Ce qui montre que la famille F_2 est liée. D'où elle n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
(c). $u_1 = (0,0,0)\,, u_2 = (1,0,1)\,, u_3 = (2,1,-6)$
Posons

$$F_3 = \{u_1 = (0,0,0)\,, u_2 = (1,0,1)\,, u_3 = (2,1,-6)\}$$

F_3 est une famille liée, car $0_{\mathbb{R}^3} \in F_3$ (On peut trouver trois scalaires α_1, α_2,α_3 $\in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i u_i = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$ par exemple $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1,0,0)$). Donc F_3 n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire les composantes du vecteur $(1,-2,-1)$ **dans la base** $B = \{v_1(1,0,3), v_2(2,1,0), v_3(0,-1,2)\}$
Résolvons l'équation vectorielle suivante

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = X$$

avec $\alpha_1,\ \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ et $X = (1, -2, -1)$.

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i v_i = X \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \quad \text{...} \quad \text{Eq(1)} \\ \\ \alpha_2 - \alpha_3 = -2 \quad \text{...} \quad \text{Eq(2)} \\ \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_3 = -1 \ \text{...} \quad \text{Eq(3)} \end{cases}$$

De l'équation Eq(1) on obtient

$$\alpha_1 = 1 - 2\alpha_2$$

et de l'équation Eq(2) on obtient

$$\alpha_3 = 2 + \alpha_2$$

On remplace α_1 et α_3 dans Eq(3), on trouve:

$$3\,(1 - 2\alpha_2) + 2\,(2 + \alpha_2) = -1 \Leftrightarrow -4\alpha_2 + 7 = -1$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 2,$$

alors, $\alpha_1 = -3$ et $\alpha_3 = 4$. Donc les composantes du vecteur $(1, -2, -1)$ dans la base $B = \{v_1(1, 0, 3), v_2(2, 1, 0), v_3(0, -1, 2)\}$ sont: $-3, 2, 4$.

Exercice 2:
E étant un espace vectoriel sur un corps commutatif $\Bbbk$.
Déterminer la dimension de E en donnant une base:
1. $E = \mathbb{C}$ **et** $\Bbbk = \mathbb{R}$
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
On a:

$$z = x \times (1) + y \times (i) = x \times u_1 + y \times u_2, \quad \text{avec } u_1 = 1, u_2 = i.$$

Alors, la famille $B_1 = \{u_1 = 1, u_2 = i\}$ est génératrice de E et comme elle est libre (car $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha u_1 + \beta u_2 = 0_E \Rightarrow \alpha = \beta = 0$), alors elle forme une base de E.

$$\dim E = card\,(B_1) = 2.$$

2. $E = \mathbb{C}$ **et** $\Bbbk = \mathbb{C}$
Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
On a:

$$z = z \times (1) = z \times u, \quad \text{avec } u = 1.$$

Alors, la famille $B_2 = \{u = 1\}$ est génératrice de E et comme elle est libre (car $u \neq 0_E$), alors elle forme une base de E.

$$\dim E = card\,(B_2) = 1.$$

3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$
Soit $X = (x, y, z) \in E$.
On a:

$$x + y - z = 0 \Leftrightarrow x = -y + z,$$

donc

$$X = (x, y, z) = (-y + z, y, z) = (-y, y, 0) + (z, 0, z)$$

$$= y\underbrace{(-1, 1, 0)}_{v_1} + y\underbrace{(1, 0, 1)}_{v_2}$$

Alors, la famille $B_3 = \{v_1 = (-1, 1, 0)\,, v_2 = (1, 0, 1)\}$ est génératrice de E et comme elle est libre (car $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha v_1 + \beta v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$), alors elle forme une base de E.

$$\dim E = card\,(B_3) = 2.$$

4. $E = \{(x, y, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$
Soit $X = (x, y, z) \in E$.
On a:

$$X = (x, y, y) = (x, 0, 0) + (0, y, y)$$

$$= x\underbrace{(1, 0, 0)}_{w_1} + y\underbrace{(0, 1, 1)}_{w_2}$$

Alors, la famille $B_4 = \{w_1 = (1, 0, 0)\,, w_2 = (0, 1, 1)\}$ est génératrice de E et comme elle est libre (car $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha w_1 + \beta w_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$), alors elle forme une base de E.

$$\dim E = card\,(B_4) = 2.$$

Exercice 3:
Déterminer le rang dans $\mathbb{R}^3$ de la famille $A = \{u_1(1, 2, 3), u_2(3, 2, 1), u_3(3, 3, 3), u_4(7, 0, -7)\}$.
Par définition, on a

$$rg\,(A) = \dim \left[\underbrace{vect\,(u_1(1, 2, 3), u_2(3, 2, 1), u_3(3, 3, 3), u_4(7, 0, -7))}_{E}\right]$$

A est une famille de 4 éléments dans un espace de dimension 3, alors

$$\dim\,[vect\,(u_1(1, 2, 3), u_2(3, 2, 1), u_3(3, 3, 3), u_4(7, 0, -7))] \leq 3.$$

et A est une famille liée. Résolvons l'équation vectorielle

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i u_i = 0_{\mathbb{R}^3},$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \{1,2,3,4\})$.
On trouve

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + 7\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - 7\alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_3 \\ \\ \alpha_4 = -\frac{2}{7}\alpha_2 - \frac{3}{14}\alpha_3 \end{cases} \quad (*)$$

On prend $\alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = -2$, on trouve $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_4 = -\frac{1}{7}$, alors on obtient la relation de dépendance suivante:

$$u_1 + 2u_2 - 2u_3 - \tfrac{1}{7}u_4 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On choisit une sous famille de trois vecteurs, par exemple la famille $\{u_1, u_2, u_4\}$.
On prend (dans $(*)$), $\alpha_2 = -7$ et $\alpha_3 = 0$, on trouve $\alpha_1 = 7$ et $\alpha_4 = 2$, alors on obtient la relation de dépendance suivante:

$$7u_1 - 7u_2 + 2u_4 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

De même manière, on peut vérifier que toute famille de trois vecteurs est liée.

$$\begin{aligned} vect\,(u_1,u_2,u_3,u_4) &= vect\left(u_1, u_2, \tfrac{3}{4}u_1 + \tfrac{3}{4}u_2, -\tfrac{7}{2}u_1 + \tfrac{7}{2}u_2\right) \\ &= vect\,(u_1,u_2). \end{aligned}$$

On choisit une sous famille de 2 vecteurs. Par exemple

$$A' = \{u_1(1,2,3), u_2(3,2,1)\}$$

La famille A' est génératrice de E et elle est libre, car pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

Donc, la famille A' est une base de E. Alors

$$\dim E = card\left(A'\right) = 2.$$

D'où $rg\,(A) = 2$.

Exercice 4:
Soit E le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$E = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
On a:
(i) $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in E$.
(ii) Soient $u = (x, x, x), v = (x^{'}, x', x^{'}) \in E$, an a:

$$u + v = \left(\underbrace{x + x^{'}}_{a}, \underbrace{x + x^{'}}_{a}, \underbrace{x + x^{'}}_{a}\right) = (a, a, a) \in E, \quad \text{avec} \quad a = x + x^{'} \in \mathbb{R}.$$

Alors, $u + v \in E$.
(iii) Soient $u = (x, x, x) \in E, \alpha \in \mathbb{R}$, on a:

$$\alpha u = \left(\underbrace{\alpha x}_{A}, \underbrace{\alpha x}_{A}, \underbrace{\alpha x}_{A}\right) = (A, A, A) \in E, \quad \text{avec} \quad A = \alpha x \in \mathbb{R}.$$

donc $\alpha u \in E$.
Alors, E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E ainsi $\dim E$.
Soit $X = (x, x, x) \in E$.
On a:

$$X = (x, x, x) = x\underbrace{(1, 1, 1)}_{u_1}$$

Alors, la famille $B_1 = \{u_1 = (1, 1, 1)\}$ est génératrice de E et comme elle est libre (car $u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$), alors elle forme une base de E.

$$\dim E = card\,(B_1) = 1.$$

3. Soit F le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(y + z, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R}\right\}$$

Déterminer une base de F ainsi $\dim F$.
Soit $X = (y + z, y, z) \in F$.
On a:

$$X = (y + z, y, z) = (y, y, 0) + (z, 0, z)$$

$$= y\underbrace{(1, 1, 0)}_{u_2} + z\underbrace{(1, 0, 1)}_{u_3}$$

Alors, la famille $B_2 = \{u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,1)\}$ est génératrice de F et comme elle est libre (car $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha u_2 + \beta u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$), alors elle forme une base de F.

$$\dim F = card\,(B_2) = 2.$$

4. E **et** F **sont-ils supplémentaires? Justifier votre réponse.**
Comme

$$\dim E + \dim F = 4 \neq \dim \mathbb{R}^3,$$

alors, E et F ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5:
Soient les deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0\}$$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$$

F **et** G **sont-ils en somme directe? Justifier votre réponse.**
On détermine $F \cap G$, c'est-à-dire on résout l'équation vectorielle $X_F = X_G$.
Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$X = (x,y,z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ \\ y = -x + 2z = z \end{cases}$$

Donc,

$$X = (x,y,z) = (z,z,z) = z\underbrace{(1,1,1)}_{u_1},$$

On a donc,

$$X = (x,y,z) \in F \cap G \Leftrightarrow X = \lambda u_1$$

Alors,

$$F \cap G = vect\,(u_1) = \{\lambda u_1 / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

D'où $F \cap G$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $u_1 = (1,1,1)$. Et comme $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, alors F et G ne sont pas en somme directe.

Exercice 6:
1. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = -2x\}$

Montrer que F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$
On a:
(i) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$, car

$$z_{0_{\mathbb{R}^3}} = 0 = -2x_{0_{\mathbb{R}^3}}.$$

(ii) Soient $u = (x, y, z), v = (x^{'}, y', z^{'}) \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, an a:

$$\alpha u + \beta v = \left(\underbrace{\alpha x + \beta x^{'}}_{a}, \underbrace{\alpha y + \beta y^{'}}_{b}, \underbrace{\alpha z + \beta z^{'}}_{c} \right) \in F?$$

On a:

$$c = \alpha z + \beta z^{'} = \alpha\left(-2x\right) + \beta\left(-2x^{'}\right) = -2\left(\alpha x + \beta x^{'}\right) = -2a$$

donc $\alpha u + \beta v \in F$.
Alors, F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer $\dim F$
Soit $X = (x, y, z) \in F$.
On a:

$$X = (x, y, z) = (x, y, -2x) = (x, 0, -2x) + (0, y, 0)$$

$$= x\underbrace{(1, 0, -2)}_{u_1} + y\underbrace{(0, 1, 0)}_{u_2}$$

D'où $B_1 = \{u_1,\ u_2\}$ est une famille génératrice de F. Puisque u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires (car il n'existe pas un réel λ tel que $u_1 = \lambda\ u_2$), donc $B_1 = \{u_1,\ u_2\}$ est aussi une famille libre et donc $B_1 = \{u_1,\ u_2\}$ est une base de F.

$$\dim F = card\left(B_1\right) = 2.$$

2. Soient $v_1 = (-1, 0, 2), v_2 = (1, 2, 0), v_3 = (2, 2, -2)$
Déterminer le sev G engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ ainsi que la dimension de G.
On remarque que

$$v_1 - v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3},$$

alors,

$$Vect\left(v_1, v_2, v_3\right) = Vect\left(v_1, v_2\right).$$

Donc, G est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs v_1 et v_2 , et comme la famille $\{v_1, v_2\}$ est libre (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires), alors elle forme une base de G et on a:

$$\dim G = card\left(\{v_1, v_2\}\right) = 2.$$

Soit $X = (a, b, c) \in G$, alors $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $X = \alpha v_1 + \beta v_2$.

$$X = \alpha v_1 + \beta v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = a \\ \\ 2\beta = b \\ \\ 2\alpha = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = a \\ \\ \beta = \frac{1}{2} b \\ \\ \alpha = \frac{1}{2} c \end{cases}$$

Donc, on trouve l'équation

$$\tfrac{1}{2} c + \tfrac{1}{2} b = a \Leftrightarrow 2a - b + c = 0,$$

alors, on peut définir le sev G par:

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0 \right\}.$$

3. Déterminer $F \cap G$ et $\dim(F \cap G)$. A -t - on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?

Soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$X=(x,y,z)\in F\cap G \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x \\ X=\alpha v_1+\beta v_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x \\ (x,y,z)=\alpha\,(-1,0,2)+\beta\,(1,2,0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-2x \\ x=-\alpha+\beta \\ y=2\beta \\ z=2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha=-2\,(-\alpha+\beta) \\ x=-\alpha+\beta \\ y=2\beta \\ z=2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ x=-\alpha \\ y=0 \\ z=2\alpha \end{cases}$$

Donc,

$$X=(x,y,z)=(\alpha,0,-2\alpha)=\alpha\,(1,0,-2)$$

Posons

$$w=(1,0,-2)$$

On a donc,

$$X=(x,y,z)\in F\cap G \Leftrightarrow X=\lambda w$$

Alors,

$$E\cap F=vect\,(w)$$

D'où $\{w\}$ est une famille génératrice de $F \cap G$. Puisque $w \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $\{w\}$ est une famille libre et donc $\{w\}$ est une base de $F \cap G$.

$$\dim F \cap G = card\left(\{w\}\right) = 1.$$

A t-on $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$?
Comme

$$F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\},$$

alors, F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.