USTO MB-Faculté des Mathématiques et Informatique
Département d'Informatique
Examen final -Matière : Algèbre II-Durée :1h30mn-14/05/2024
Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice1 :(06 points)

1. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $u = (1, 0, 1)$,$v = (2, 1, 0)$,$w = (t, -1, 2)$
   Donner une condition sur $t \in \mathbb{R}$ pour que les vecteurs u, v et w forment une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la définition du Rang d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel.
3. Donner la définition du rang d'une application linéaire, et énoncer le théorème du rang.
4. Soit f une application linéaire de E dans F.
   -Monter que $Ker(f)$ est sous espace vectoriel de E.

Exercice2 :(05 points)
Soit E =$\mathbb{R}^3$ et F le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par ; $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x - y - 2z = 0\}$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer une base de F ainsi dim F.
3. Soit G le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(0, 1, 1)$ Déterminer $F \cap G$ et en déduire que $E = F \bigoplus G$

Exercice 3 : (04 Points)
Soit B la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que B est inversible
2. Calculer $B^3 - 2B^2 + I_3$ avec I_3 la matrice unité.
3. En déduire l'inverse de B

Exercice 4 : (05 Points) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\ker f$ ainsi que Imf
2. On considère la famille B' de $\mathbb{R}^3$.

$$B^{'} = \{u_1\,(1, 0, -1)\,, u_2\,(1, 1, 0)\,, u_3\,(1, 1, -1)\}$$

(a). Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c). Écrire la matrice associée à f dans la base $B^{'}$.