USTO MB- Faculté des Mathématiques et Informatique
Département d'Informatique
Rattrapage-Matière: Algèbre I - 11/06/2024 - Durée : 1h30mn

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice 1:

1/ Donner la négation des propositions suivantes:

$a - \forall x \in \mathbb{R}, (2x > x)$.

$b - \forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0 \Rightarrow 2x > x$.

2/ Soit $x, y \in \mathbb{R}^+$, montrer par contraposée que:

$$x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$$

3/ Soit $x, y \in \mathbb{R}$, montrer par l'absurde que:

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

Exercice 2:

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soient A et B deux parties de E. On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

1/ Calculer $f(E)$, $f(A \cup B)$.

2/ Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$.

3/ Supposons qu'il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = (A, \emptyset)$. Calculer $A \cap B$.

Exercice 3:

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, où l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par : $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

1/ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2/ Déterminer les classes d'équivalences de 0.

Exercice 4:

Soit U le sous ensemble de $\mathbb{C}$ défini par: $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.
Montrer que U est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Corrigé Rattrapage -Algèbre 1
2023-2024

<ins>**Exercice 1:**</ins> **(06 points)**

1/ Donner la négation des propositions suivantes:

$a-$La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, (2x > x)$ est $\exists x \in \mathbb{R}, (2x \leq x)$ **(01)**

$b-$La négation de $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Rightarrow 2x > x$ est $\exists x \in \mathbb{R},\ (x > 0) \wedge (2x \leq x)$. **(01)**

2/ Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$, montrer par contraposée que:

$$x \neq y \Rightarrow \tfrac{x}{1+y} \neq \tfrac{y}{1+x}$$

La contraposée de $x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+y} \neq \frac{y}{1+x}$ est $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Rightarrow x = y$.
Donc, pour $x, y \in \mathbb{R}^+$ on a:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{x}{1+y} = \tfrac{y}{1+x} \Rightarrow x(1+x) = y(1+y) \\
&\Rightarrow x + x^2 - y - y^2 = 0 \\
&\Rightarrow \left(x^2 - y^2\right) + (x - y) = 0 \\
&\Rightarrow (x-y)(x+y+1) = 0 \\
&\Rightarrow x - y = 0 \ \text{ car } x, y \in \mathbb{R}^+ \\
&\Rightarrow x = y.
\end{aligned}$$ **(02)**

Alors, d'après le raisonnement par contraposée on déduit que

$$x \neq y \Rightarrow \tfrac{x}{1+y} \neq \tfrac{y}{1+x}$$

3/ Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer par l'absurde que:

$$xy \leq \tfrac{x^2+y^2}{2}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, supposons que $xy > \frac{x^2+y^2}{2}$ **(02)**

$$\begin{aligned}
xy > \tfrac{x^2+y^2}{2} &\Rightarrow 0 > x^2 + y^2 - 2xy \\
&\Rightarrow 0 > (x-y)^2
\end{aligned}$$

qui est impossible. Donc d'après le raisonnement par l'absurde on déduit que

$$xy \leq \tfrac{x^2+y^2}{2}$$

<ins>**Exercice 2:**</ins> **(06 points)**

Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Soient A et B deux parties de E. On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned}
f : \mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \\
X &\mapsto (X \cap A, X \cap B)
\end{aligned}$$

1/ Calculer $f(E)$, $f(A \cup B)$.

$$f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$$ **(01,5)**

$$f(A\cup B)=((A\cup B)\cap A,(A\cup B)\cap B)=(A,B) \quad \textbf{(01,5)}$$

2/ Montrer que : f **est injective** $\Leftrightarrow A\cup B=E$.
($\Rightarrow$) Supposons que f est injective
D'après (1), on a:

$$f(E)=(A,B)=f(A\cup B), \quad \textbf{(01)}$$

et comme f est injective, alors $A\cup B=E$.
($\Leftarrow$) Supposons que $A\cup B=E$, Soient $A_1,A_2\in\mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned}
&f(A_1)=f(A_2)\Rightarrow(A_1\cap A,A_1\cap B)=(A_2\cap A,A_2\cap B)\\
&\Rightarrow\begin{cases}A_1\cap A=A_2\cap A\\ \\ A_1\cap B=A_2\cap B\end{cases}\\
&\Rightarrow(A_1\cap A)\cup(A_1\cap B)=(A_2\cap A)\cup(A_2\cap B) \quad \textbf{(01)}\\
&\Rightarrow A_1\cap(A\cup B)=A_2\cap(A\cup B)\\
&\Rightarrow A_1\cap E=A_2\cap E\\
&\Rightarrow A_1=A_2
\end{aligned}$$

d'où f est injective.
3/ Supposons qu'il existe $X\in\mathcal{P}(E)$ tel que $f(X)=(A,\emptyset)$. **Calculer** $A\cap B$**.**

$$f(X)=(A,\emptyset)\Leftrightarrow(X\cap A,X\cap B)=(A,\emptyset)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}X\cap A=A\\ \\ X\cap B=\emptyset\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A\subset X\\ \\ X=C_E(B)\end{cases} \quad \textbf{(01)}$$

alors,

$$A\cap B=\emptyset$$

<u>**Exercice 3:**</u> **(04 points)**
On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathcal{R}$ par: $\forall x,y\in\mathbb{R}: x\mathcal{R}y\Leftrightarrow f(x)=f(y)$, où l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie par : $f(x)=x^3-x^2-4x+4$.
1/ Montrer que R **est une relation d'équivalence:**
(i) Réfléxive: $\forall x\in\mathbb{R}, x\Re x$
Soit $x\in\mathbb{R}$, on a:

$$f(x)=f(x)\Rightarrow x^3-x^2-4x+4=x^3-x^2-4x+4\Rightarrow x\Re x \quad \textbf{(01)}$$

Alors, $\Re$ est réflexive.
(ii) **Symétrique:** $\forall x,y\in\mathbb{R}, x\Re y\Rightarrow y\Re x$
Soient $x,y\in\mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned}
x\Re y\Rightarrow f(x)=f(y)&\Rightarrow x^3-x^2-4x+4=y^3-y^2-4y+4\\
&\Rightarrow y^3-y^2-4y+4=x^3-x^2-4x+4 \quad \textbf{(01)}\\
&\Rightarrow f(y)=f(x)\Rightarrow y\Re x
\end{aligned}$$

Alors, $\Re$ est symétrique.
(iii) **Transitive:** $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$,($x\Re y$ et $y\Re z$)$\Rightarrow x\Re z$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a:

$$(x\Re y \text{ et } y\Re z) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ \\ f(y) = f(z) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 4 = y^3 - y^2 - 4y + 4 \\ \\ y^3 - y^2 - 4y + 4 = z^3 - z^2 - 4z + 4 \end{cases} \quad \textbf{(01)}$$
$$\Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = z^3 - z^2 - 4z + 4$$
$$\Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x\Re z$$

Alors, $\Re$ est transitive.
De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\Re$ est une relation d'équivalence.
2/ Déterminer les classes d'équivalences de 0**.**
On a:

$$\begin{aligned} Cl\,(0) &= \{y \in \mathbb{R} \ \ / \ \ 0\Re y\} \quad \textbf{(0.5)} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} \ \ / \ y^3 - y^2 - 4y = 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} \ \ /y\left(\ y^2 - y - 4\right) = 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} \ \ /y = 0 \quad \text{ou} \quad y = \tfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}\right\} \\ &= \left\{\tfrac{1-\sqrt{17}}{2}, 0, \tfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right\} \quad \textbf{(0.5)} \end{aligned}$$

Exercice 4: **(04 points)**
Soit U le sous ensemble de $\mathbb{C}$ défini par: $U = \{z \in \mathbb{C}/\, |z| = 1\}$.
Montrer que U **est un sous groupe de** $(\mathbb{C}^*, \times)$:
(i) $|0_{\mathbb{C}}| = |1| = 1$, donc $0_{\mathbb{C}} \in U$ **(01)**
(ii) Soient $x, y \in U$, donc $|x| = |y| = 1$.

$$x \times y^{-1} \in U? \quad \textbf{(01)}$$

On a:

$$y \times y^{-1} = 1 \Rightarrow \left|y \times y^{-1}\right| = 1 \Rightarrow |y| \left|y^{-1}\right| = 1 \Rightarrow \left|y^{-1}\right| = 1, \quad \textbf{(02)}$$

donc,

$$\left|x \times y^{-1}\right| = |x| \left|y^{-1}\right| = 1 \Rightarrow x \times y^{-1} \in U.$$

De (i) et (ii) on déduit que U *est un sous groupe de* $(\mathbb{C}^*, \times)$.