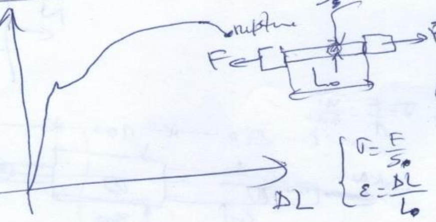
<u>Rappel de cours</u>

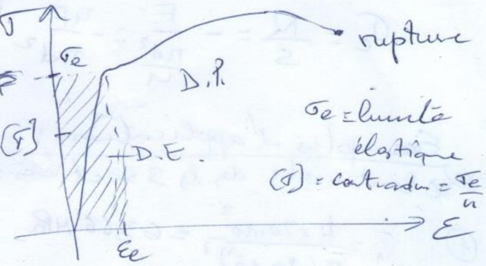
RDM

Contraintes - déformations

1) Courbe de traction



$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{F}{S_0} \\ \varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L_0} \end{cases}$$



σ_e = limite élastique

$[\sigma]$ = contrainte $= \dfrac{\sigma_e}{n}$

$$\begin{cases} \text{Contrainte} : \sigma = \dfrac{F}{S_0} \\ \text{Déformation} : \varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} \end{cases}$$

Domaine Elastique :

σ proportionnelle à ε ⇒

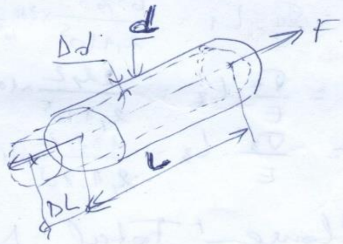
La loi de Hooke : $\boxed{\sigma = E . \varepsilon}$

$$\sigma = E . \varepsilon \Rightarrow \frac{F}{S_0} = E . \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow E = \frac{F}{S_0} . \frac{L_0}{\Delta L} : \text{module de Young}$$

2) Coeff de Poisson "ν"

Déf. Longitudinale : $\varepsilon_L = \dfrac{\Delta L}{L_0}$

Déf. (radiale) Transversale : $\varepsilon_t = -\dfrac{\Delta d}{d_0}$



ν = Coeff. de Poisson : $\nu = \dfrac{\text{Déf. } \cancel{\text{Radiale}} \text{ Transversale}}{\text{Déf. Long.}} = \dfrac{\varepsilon_t}{\varepsilon_L}$

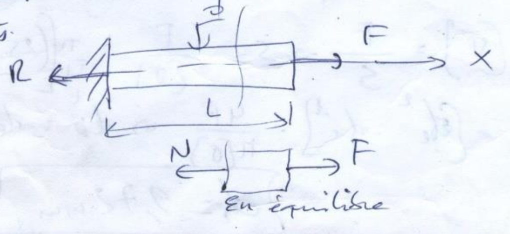
$$\nu = \left(-\frac{\Delta d}{d_0}\right) \Big/ \left(\frac{L_0}{\Delta L}\right) = -\frac{\Delta d}{\Delta L} . \frac{L_0}{d_0} \Rightarrow$$

$\nu = 0{,}25 \div 0{,}33$ pour les matériaux élastiques.

$$\boxed{\varepsilon_t = \nu . \varepsilon_L = \nu \frac{\sigma}{E}}$$

3) Traction (Compression) simple

Barre en traction en équilibre en tous pts.



$\Sigma F = 0 \Rightarrow -N + F = 0$

$\boxed{N = F}$

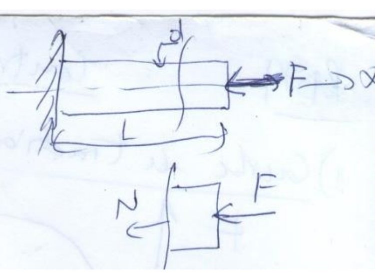
$$\sigma_t = \frac{N}{S} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4F}{\pi d^2}$$

1

Barre en Compression en éq. en ts pts.

$\Sigma F = 0 \Rightarrow -N - F = 0 \Rightarrow \boxed{N = -F}$

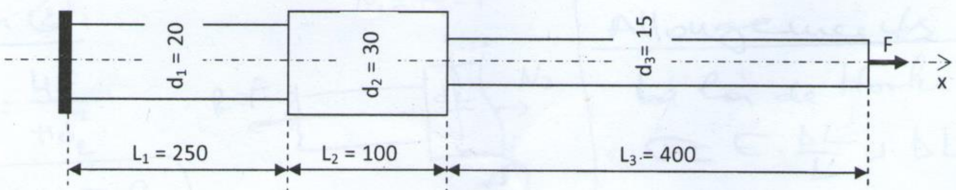
$$\sigma_c = \frac{N}{S} = -\frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} = -\frac{4F}{\pi d^2}$$



Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique 2$^{\text{ème}}$ Année LMD RDM

TD1 Traction simple

Ex1/ Calculer les contraintes et les allongements dans les 3 sections de la barre en traction sous l'action de la force F= 20 KN. Le module de Young E=2,1 10^5 MPa.



X **Ex2**/ Une barre de diamètre d=25 mm et de longueur L= 200 mm est sous l'action d'une force de traction F= 100 KN.

a/ Calculer le module de Young *E* et la réduction du diamètre *d* si l'allongement ΔL= 0,19 mm et le coefficient de Poisson *ν*= 0,3.

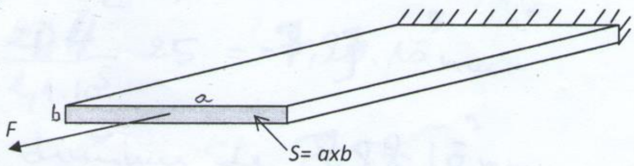
b/ Si la barre a une la forme d'un tube de même diamètre extérieur, calculer le diamètre intérieur qui satisfait la condition de résistance sachant que $[\sigma_t]$=240 MPa.

1 X **Ex3**/ Une barre de dimensions 40x30x5000 est sous traction avec une force F= 120 KN.

a/ Déterminer la contrainte de traction et déduire les conditions de résistance sachant que $[\sigma_t]$=144 MPa.

b/ Calculer son allongement ΔL si E=2,1 10^5 MPa.

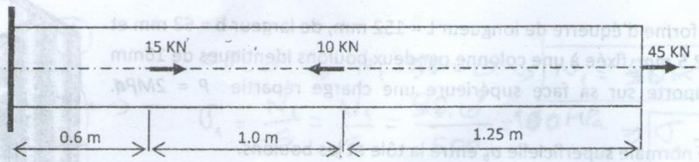
2 X **Ex4**/ Une barre en fer plat ~~de~~ de longueur *L*= 3m et d'épaisseur *b*= 10mm est soumise à une force de traction *F*= 80 KN. Déterminer sa largeur *a* pour que son allongement ΔL_{max} de dépasse pas 2 mm.
E=2,1 10^5 MPa et $[\sigma_t]$=144 MPa.



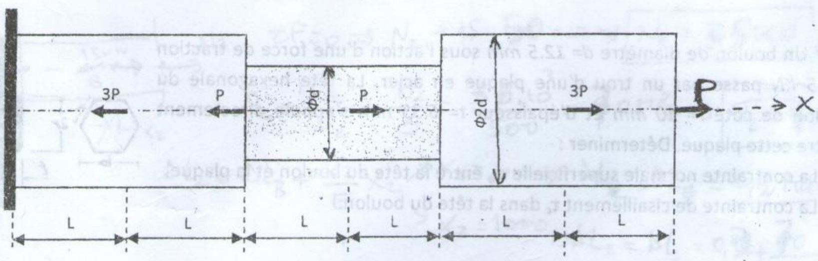
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique 2[ème] Année LMD RDM

TD1 Traction simple [suite]

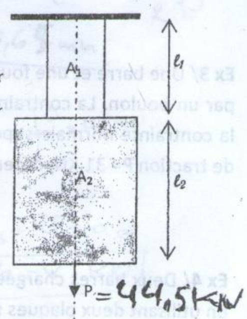
Ex4/ Une barre en acier de section $S = 500\ mm^2$ est soumise à des forces axiales. Tracer les diagrammes des efforts normaux, des contraintes et des allongements. Le module de Young $E=2.0\ 10^5\ MPa$.



Ex5/ Soit une barre en acier dans laquelle est intercalée une barre en cuivre. Elle est exposée à un système de chargement axial. Tracer les diagrammes des efforts normaux, des contraintes et des allongements. $E_{Acier}=2.1\ 10^5\ MPa$, $E_{Cuivre}=1.2\ 10^5\ MPa$, $L = 0.5\ m$, $d = 20\ mm$, $P = 10\ KN$.



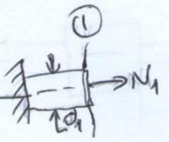
Ex6/ Les deux barres sont rigidement attachées.
La barre en acier : $E_a= 2.1\ 10^5\ MPa$, $\rho_a = 7850\ Kg/m^3$, $\ell_1 =10.7\ m$ $S_1=5160\ cm^2$
La barre en laiton : $E_\ell= 0.92\ 10^5\ MPa$, $\rho_\ell = 7850\ Kg/m^3$, $\ell_2 =14\ m$, $S_2=5600\ cm^2$
Déterminer la contrainte normale maximale dans les deux barres avec et sans l'effet du poids propre.



<u>SolutionTD1</u>

Ex1/ Contraintes

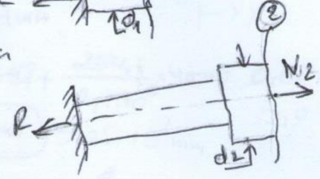
Section ①



$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_1 - R = 0$

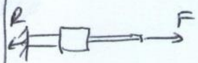
$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{F}{\frac{\pi d_1^2}{4}} = \cancel{113,2}\ 63,7\ MPa$

$S_1 = 314,2\ mm^2$



Equilibre statique

$\Rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow$



$-R + F = 0$

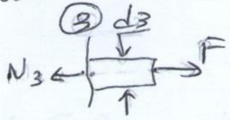
$\boxed{R = F}$

Section ②

$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_2 = R = F$

$S_2 = 706,9\ mm^2 \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{F}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = 28,3\ MPa$

de droite à gauche ou de gauche à droite $\Rightarrow$ N_1 tjrs sortant de la section



Section ③

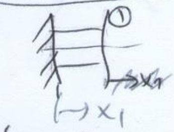
$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_3 = F$

$S_3 = 176,7\ mm^2 \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = \frac{F}{\frac{\pi d_3^2}{4}} = \cancel{254,6}\ 113,2\ MPa$

$\sigma_{max} = Sup\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \sigma_3 = \cancel{254,6}\ 113,2\ MPa$

Déformation:

Section ① $0 \le x_1 \le 250\ mm$

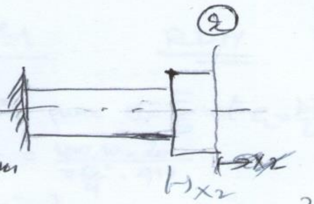


$\Delta L_1 = \frac{N_1 x_1}{S_1 E}$ ou $\Delta L_1 = \frac{\sigma_1}{E} x_1$

$\Delta L_1 = \frac{\sigma_1}{E} x_1 \nearrow x_1 = 0 \Rightarrow \Delta L_1 = 0$

$\searrow x_1 = 250 \Rightarrow \Delta L_1 = \frac{\cancel{113,2}\ 63,7}{2,1.10^5} \times 250 = \cancel{0,13}\ mm \quad 7,58.10^{-2}\ mm$

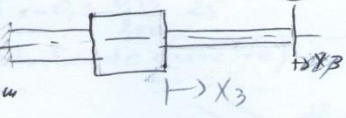
Section ② $0 \le x_2 \le 100\ mm$



$\Delta L_2 = \Delta L_1\big|_{x_1=250} + \frac{\sigma_2}{E} x_2$

$\begin{cases} x_2 = 0 \Rightarrow \Delta L_1 = \Delta L_1\big|_{x_1=250} = \cancel{0,13\ mm} \\ x_2 = 100 \Rightarrow \Delta L_1 = \cancel{0,13} + \frac{28,3}{2,1.10^5} \times 100 = \cancel{0,14\ mm}\ \ 8,92.10^{-2}\ mm \end{cases}$

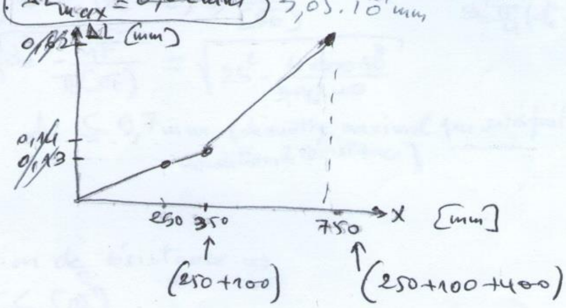
Section ③ $0 \le x_3 \le 400$



$\Delta L_3 = \Delta L_2\big|_{x_2=100} + \frac{\sigma_3}{E} x_3$

$\begin{cases} x_3 = 0 \Rightarrow \Delta L_3 = \Delta L_2\big|_{x=100} = 0,14\ mm \\ x_3 = 400 \Rightarrow \Delta L_3 = \Delta L_{max} = \cancel{0,14} + \frac{254,6}{2,1.10^5} \times 400 = \cancel{0,62\ mm}\ \ 3,05.10^{-1}\ mm \end{cases}$

$\boxed{\Delta L_{max} = \cancel{0,62\ mm}}\ 3,05.10^{-1}\ mm$



EX2) a) La loi de Hooke $\Rightarrow \sigma = E\,\varepsilon_L$ avec $\sigma = \frac{F}{S}$ et $\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L}$

$S = \frac{\pi d^2}{4}$; $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_L} = \frac{F/S}{\Delta L/L} = \frac{FL}{S\,\Delta L} = \frac{100.10^3 \cdot 200}{\pi \frac{25^2}{4} \cdot 0{,}19}$

$E = 2{,}14.10^5$ MPa (Acier)

$\nu = \frac{\text{Déformation transversale}}{\text{Déformation longitudinale}} = \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_L} = \frac{-\frac{\Delta d}{d}}{\varepsilon_L} \left(= \frac{-\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}} \right)$

$\Delta d = -\nu \varepsilon_L d = -\nu \frac{\Delta L}{L} d = -0{,}3 \, \frac{0{,}19}{200} \cdot 25$

$\Delta d = -7{,}1\,10^{-3}$ mm (réduction de diamètre)

b) Condition de résistance $\Rightarrow$

$\sigma_t \leq [\sigma_t] \Leftrightarrow \frac{F}{S} \leq [\sigma_t]$

$S = \frac{\pi}{4}(d_e^2 - d_i^2)$

$S \geq \frac{F}{[\sigma_t]} \Rightarrow \frac{\pi}{4}(d_e^2 - d_i^2) \geq \frac{F}{[\sigma_t]}$

$d_i \leq \sqrt{d_e^2 - \frac{4F}{\pi[\sigma_t]}} = \sqrt{25^2 - \frac{4 \times 100.10^3}{3{,}14 \times 240}}$

$d_i \leq 9{,}7$ mm (diamètre maximal qui satisfait la condition de résistance)

EX3) Condition de résistance $\Rightarrow$

$\sigma_t \leq [\sigma_t]$

a) $\sigma_t = \frac{F}{S}$ avec $S = 40 \times 30 = 1200$ mm^2

$\sigma_t = \frac{120.10^3}{1200} = 100$ MPa $\leq [\sigma_t] = 144$ MPa

Condition de résistance (vérifiée) satisfaite

b) La loi de Hooke $\Rightarrow \sigma = E.\varepsilon = E \frac{\Delta L}{L}$

$\Delta L = \frac{\sigma}{E} L = \frac{100}{2{,}1.10^5} \times 5000$

$\Delta L = 2{,}4$ mm

EX4) La loi de Hooke $\Rightarrow \sigma = E\,\varepsilon = E \frac{\Delta L}{L}$

$\Delta L_{max} = 2$ mm $\Rightarrow \sigma_{max} = E \frac{\Delta L_{max}}{L} = 2{,}1.10^5 \, \frac{2}{3.10^3}$

$\sigma_{max} = 140$ MPa $\leq [\sigma_t] = 144$ MPa

La condition de résistance satisfaite

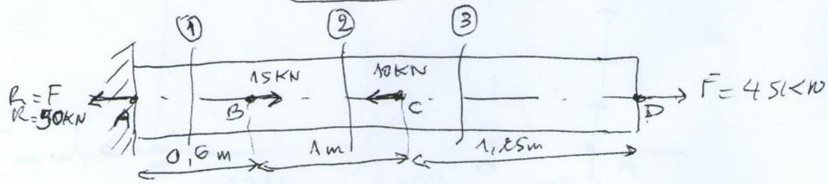
$\sigma_{max} = \frac{F}{S_{min}} = \frac{F}{a_{min} b} \Rightarrow a_{min} = \frac{F}{b\,\sigma_{max}} = \frac{80.10^3}{10 \times 140}$

$a_{min} = 57$ mm

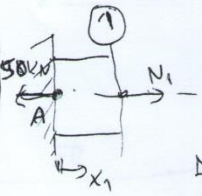
Solution TD.1 (Suite)

Ex 1 Barre en équilibre $\Rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow -R + 15 - 10 + \overbrace{45}^{F} = 0$

$\Rightarrow \boxed{R = F = 50\,kN}$



Section ① :
$0 \leq x_1 \leq 0{,}6\,m$
A B



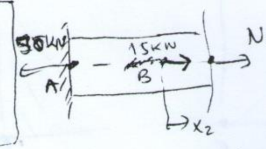
$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_1 - 50 = 0 \Rightarrow \boxed{N_1 = 50\,kN}$

$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{N_1}{S} = \frac{50.10^3}{500} = 100\,MPa \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = 100\,MPa}$

$\Delta L_1 = \frac{\sigma_1}{E} x_1 \nearrow x_1 = 0 \Rightarrow \underline{\Delta L_A = 0}$

$\searrow x_1 = 600 \Rightarrow \Delta L_B = \frac{100}{2.10^5} \times 600 = \underline{0{,}30\,mm}$

Section ② :
$0 \leq x_2 \leq 1\,m$
B C



$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_2 + 15 - 50 = 0 \Rightarrow \boxed{N_2 = 35\,kN}$

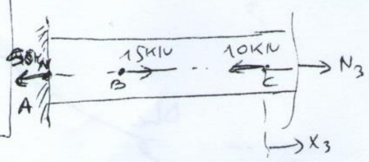
$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{N_2}{S} = \frac{35.10^3}{500} = 70\,MPa \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = 70\,MPa}$

$\Delta L_2 = \Delta L_B + \frac{\sigma_2}{E} x_2 \nearrow x_2 = 0 \Rightarrow \Delta L_2 = \underline{\Delta L_B} = \underline{0{,}3\,mm}$

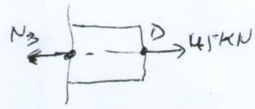
$\searrow x_2 = 1000 \Rightarrow \Delta L_2 = \Delta L_C = 0{,}3 + \frac{70}{2.10^5} \times 1000$

$\underline{\Delta L_C = 0{,}65\,mm}$

Section ③ :
$0 \leq x_3 \leq 1{,}25\,m$
C D



ou



$\Sigma F = 0 \Rightarrow N_3 - 10 + 15 - 50 = 0$

$\boxed{N_3 = 45\,kN}$

$\Sigma F = 0 \Rightarrow -N_3 + 45 = 0 \Rightarrow$

$\boxed{N_3 = 45\,kN}$

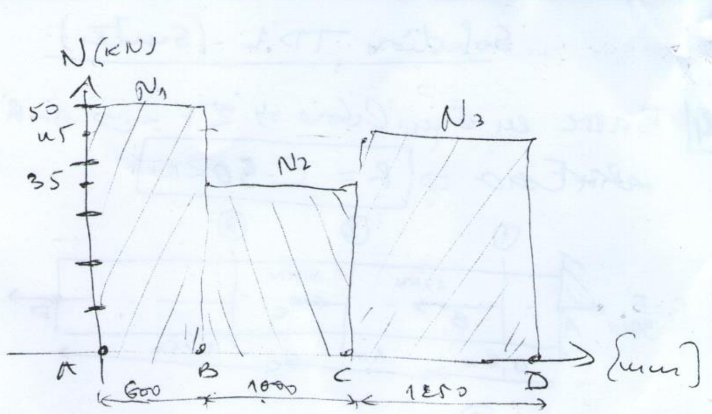
$\sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = \frac{N_3}{S} = \frac{45.10^3}{500} = 90\,MPa \Rightarrow \boxed{\sigma_3 = 90\,MPa}$

$\Delta L_3 = \Delta L_C + \frac{\sigma_3}{E} x_3 \nearrow x_3 = 0 \Rightarrow \Delta L_3 = \underline{\Delta L_C} = \underline{0{,}65\,mm}$

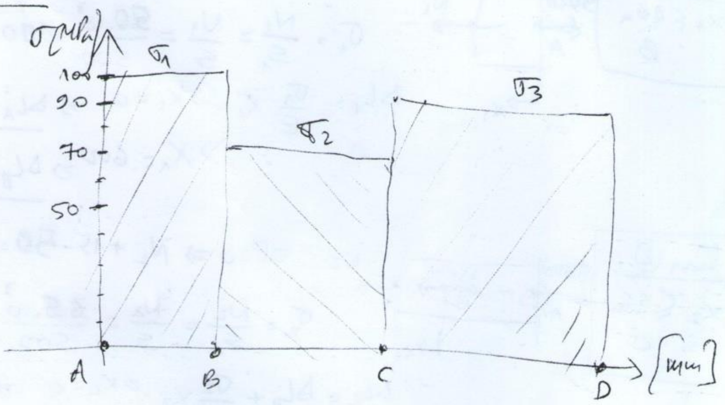
$\searrow x_3 = 1250 \Rightarrow \Delta L_3 = \Delta L_D = 0{,}65 + \frac{90}{2.10^5} \times 1250 = 1{,}21\,mm$

$\underline{\Delta L_D = 1{,}21\,mm}$

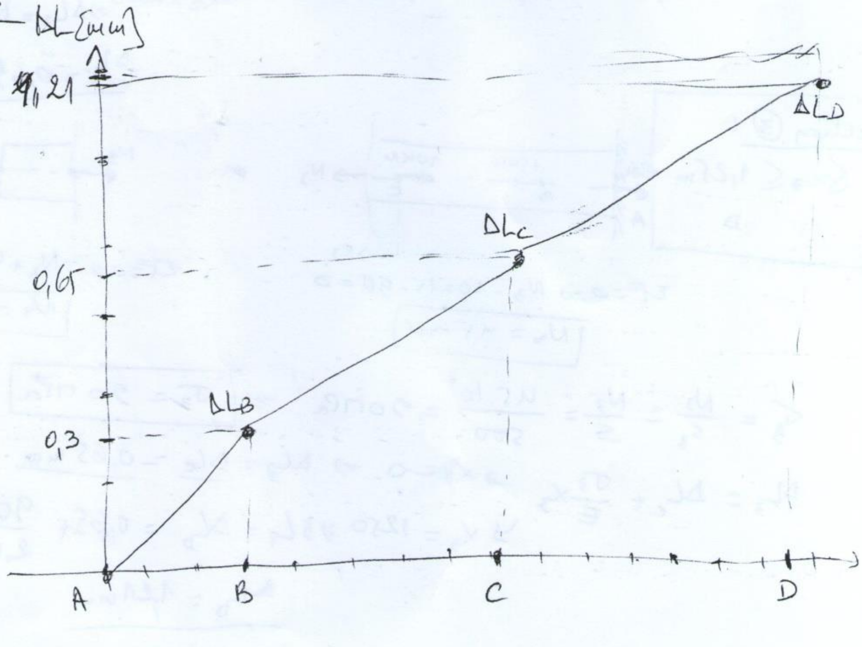
Efforts normaux



Contraints de Traction

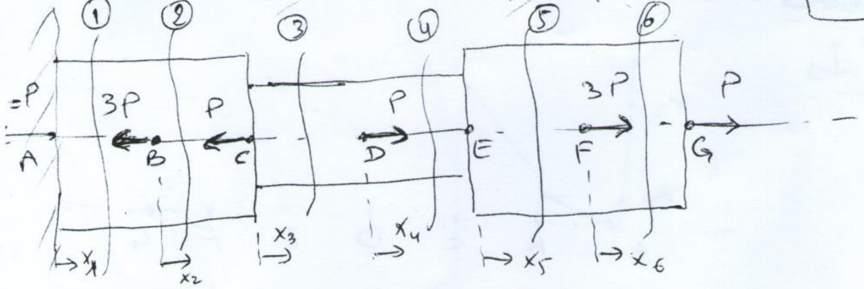


Allongements



EX 5 | Barre en équilibre $\Rightarrow \sum F = 0$

$$-R - 3P - R + P + 3P + P = 0 \Rightarrow \boxed{R = P = 10\,kN}$$



Section ① : $0 \le x_1 \le L$ (A — B)

$$N_1 = R = 10\,kN \Rightarrow \sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{N_1}{\frac{\pi(2d)^2}{4}} = \frac{4\times10\times10^3}{\pi(2\times20)^2} = 7{,}96\,MPa$$

$\sigma_1 = 7{,}96\,MPa$

$$\Delta L_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}x_1 = \frac{\sigma_1}{E_a}x_1$$

$\rightarrow x_1 = 0 \rightarrow \Delta L_1 = \Delta L_A = 0$

$\rightarrow x_1 = L = 500 \Rightarrow \Delta L_1 = \Delta L_B = \frac{7{,}96}{2{,}1.10^5}\times 500 \simeq 0{,}02\,mm$

$\Delta L_B \simeq 0{,}02\,mm$

Section ② : $0 \le x_2 \le L$ (B — C)

$$N_2 = 3P + R = 3P + P = 4P = 40\,kN$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{N_2}{\frac{\pi(2d)^2}{4}} = \frac{4N_2}{\pi(2d)^2} = \frac{4\times40.10^3}{\pi(2\times20)^2} = 31{,}82\,MPa$$

$\sigma_2 = 31{,}82\,MPa$

$$\Delta L_2 = \Delta L_B + \frac{\sigma_2}{E_a}x_2$$

$\rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \Delta L_2 = \Delta L_B = 0{,}02\,mm$

$\rightarrow x_2 = 500 \Rightarrow \Delta L_3 = \Delta L_C = 0{,}02 + \frac{31{,}82}{2{,}1.10^5}\times 500 = 0{,}09\,mm$

$\Delta L_C = 0{,}09\,mm$

Section ③ : $0 \le x_3 \le L$ (C — D)

$$N_3 = 5P = 50\,kN \Rightarrow \sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = \frac{N_3}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4N_3}{\pi d^2} = \frac{4\times50\times10^3}{\pi(20)^2} = 159{,}23\,MPa$$

$\sigma_3 = 159{,}23\,MPa$

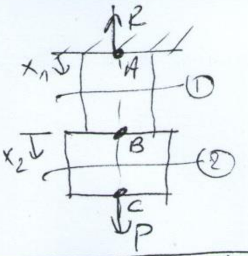
$$\Delta L_3 = \Delta L_C + \frac{\sigma_3}{E_c}x_3$$

$\rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow \Delta L_3 = \Delta L_C = 0{,}09\,mm$

$\rightarrow x_3 = 500 \Rightarrow \Delta L_3 = \Delta L_D = 0{,}09 + \frac{159{,}23}{1{,}2.10^5}\,500 = 0{,}75\,mm$

Les sections ④, ⑤ et ⑥ se traitent de la même manière $\Rightarrow$ les étudiants termineront l'ex 5 seuls chez eux.

Ex6 / Contrainte normale maximale



(*) Sans l'effet du poids propre

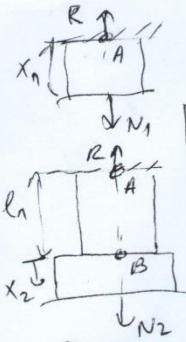
Barre en équilibre $\Rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow \boxed{R = P}$

Section ① : $0 \leq x_1 \leq l_1$ (A → B)

$N_1 = R = P = 44{,}5 KN$

$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{P}{S_1} = \frac{44{,}5.10^3}{5160} = 8{,}62 MPa$

$$\boxed{\sigma_1 = 8{,}62 MPa}$$



Section ② : $0 \leq x_2 \leq l_2$ (B → C)

$N_2 = R = P = 44{,}5 KN$

$\sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{P}{S_2} = \frac{44{,}5.10^3}{5600} = 7{,}94 MPa$

$$\boxed{\sigma_2 = 7{,}94 MPa}$$

A compléter sur la fiche de TD les données :
$P = 44{,}5 KN$
$S_1 = 5160 mm^2$
$S_2 = 5600 mm^2$

$$\sigma_{max} = \sup\{\sigma_1, \sigma_2\} = \sigma_1 = 8{,}62 MPa$$

(*) Avec effet du poids propre

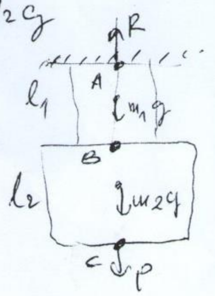
Barre en équilibre $\Rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow P + \rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g - R = 0$

$m_1 = \rho_1 V_1$ et $m_2 = \rho_2 V_2$

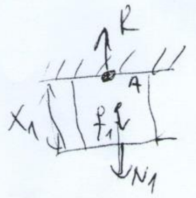
$R = P + \rho_1 V_1 g + \rho_2 V_2 g$

$V_1 = S_1 l_1$ et $V_2 = S_2 l_2$

$$\boxed{R = P + \rho_1 S_1 l_1 g + \rho_2 S_2 l_2 g}$$



section ① : $f_1 = m_1(x_1).g = \rho_1 V_1(x_1) g$

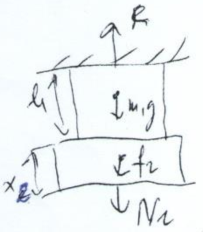


$f_1 = \rho_1 S_1 x_1 g$

$N_1 = R - f_1 = R - \rho_1 S_1 g X_1$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow N_1 = \underline{N_A} = R = P + \rho_1 S_1 l_1 g + \rho_2 S_2 l_2 g = \underline{N_{1max}} \\ x_1 = l_1 \Rightarrow N_1 = \underline{N_B} = R - \rho_1 S_1 g l_1 = P + \rho_2 S_2 l_2 g = \underline{N_{1min}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{1max} = \frac{N_{1max}}{S_1} \\ \sigma_{1min} = \frac{N_{1min}}{S_1} \end{cases}$$



section ② : $f_2 = m_2(x_2) g = \rho_2 V_2(x_2) g = \rho_2 S_2 g X_2$

$N_2 = R - m_1 g - f_2 = \underbrace{R - \rho_1 l_1 S_1 g}_{P + \rho_2 l_2 S_2 g} - \rho_2 S_2 g X_2$

$x_2 = 0 \Rightarrow N_2 = P + \rho_2 l_2 S_2 g = N_B = N_{2max}$

$x_2 = l_2 \Rightarrow N_2 = \cancel{R} + \cancel{\rho_2 l_2 S_2 g} - \cancel{\rho_2 S_2 g l_2} = P = N_{2min}$

$\sigma_{2max} = \frac{N_{2max}}{S_2}$ et $\sigma_{2min} = \frac{N_{2min}}{S_2}$

$\sigma_{max} = \sup\{\sigma_{1max} ; \sigma_{2max}\} = ?$