CHAPITRE 1 : NOTIONS D'ANALYSE VECTORIELLE

Objectives du chapitre 1

Ce premier chapitre, intitulé « notions d'analyse vectorielle », est utilisé pour la présentation des caractéristiques principales des vecteurs et scalaires de la mécanique classique newtonienne. Aussi, il est montré les principales opérations entre les vecteurs telles que : l'addition, le produit scalaire et le produit vectoriel. Ces notions mathématiques sont très utilisées dans les prochains chapitres. L'addition des vecteurs engendre une résultante, puis un produit scalaire implique une projection, et un produit vectoriel produit un moment.

1.1. Quantités fondamentales

En mécanique classique, il y'a deux types de quantités fondamentales : scalaire et vecteur. La distinction et la compréhension des différences existantes entre ces deux types de paramètres sont essentielles pour tout lecteur des notions de cette mécanique newtonienne.

1.1.1 Scalaire

Un scalaire est un nombre réel (positif, négatif ou nul). Il est utilisé pour représenter des grandeurs diverses telles que : masse, surface, longueur, etc. Exemple : m=20kg, A=5m^2, L=100m.

1.1.2 Vecteur

Un vecteur ne peut être complètement défini par un scalaire. Par exemple, pour représenter un vecteur, la direction est indispensable. Donc, un vecteur est défini par: une direction (une ligne d'action et un sens), une intensité ou un module et un point d'application ou origine. Il doit être représenté de cette façon $\overrightarrow{AB}$ ou simplement $\vec{V}$ (Fig. 1.1).

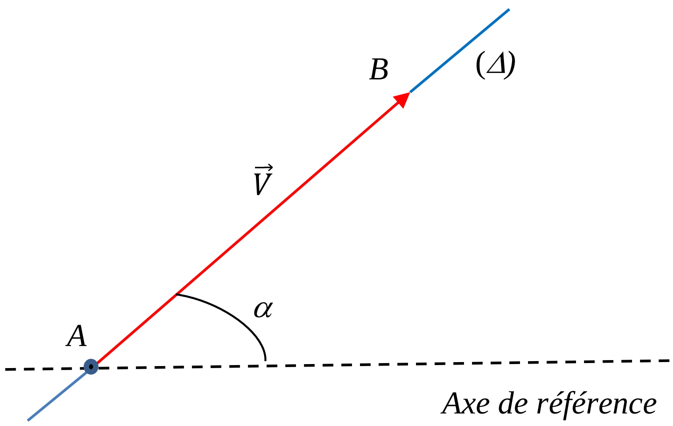


Fig. 1.1 Caractéristiques d'un vecteur.

•La ligne d'action (ou support)

C'est la droite (Δ) qui porte le vecteur $\vec{V}$ (Fig. 1.1). Cette droite est définie par l'angle directeur (α) mesuré entre l'axe de référence et le support ;

•Le sens

Il représente l'orientation origine–extrémité et est symbolisé par une flèche à l'extrémité ;

•L'intensité

C'est la grandeur mesurée. On la note par $AB = V$ ou $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{V}\|$;

•Le point d'application

L'origine du vecteur sert comme un point d'application au vecteur.

On distingue trois types de vecteurs : vecteur libre, glissant et lié :

●Vecteur libre

Un vecteur libre est défini par sa direction et son module. Son point d'application peut être quelconque dans l'espace. Exemple : le vecteur de l'accélération de la pesanteur est un vecteur libre.

●Vecteur glissant

Un vecteur glissant est défini par sa direction et son module. Son point d'application pouvant être quelconque sur son support. Exemple : une force appliquée à un solide rigide et pouvant glisser sur sa droite d'action sans modifier l'effet qu'elle produit.

●Vecteur lié

Un vecteur lié est défini par sa droite d'action, son sens, son module et son point d'application. Exemple : Le poids d'un corps est un vecteur lié. C'est un vecteur qui a un point d'application bien défini, qui est le centre de gravité du solide.

1.2. Operations sur les vecteurs

1.2.1. Addition

Deux vecteurs, par exemple, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ peuvent être additionnés pour obtenir un autre vecteur $\vec{C}$:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1.1}$$

Pour faire l'addition graphiquement, Il faut mettre les deux vecteurs bout à bout, de sorte que l'origine de $\vec{A}$ coïncide avec l'origine de $\vec{B}$. Le vecteur somme (ou résultante) $\vec{C}$ est confondu avec la diagonale du parallélogramme dessiné (Fig. 1.2).

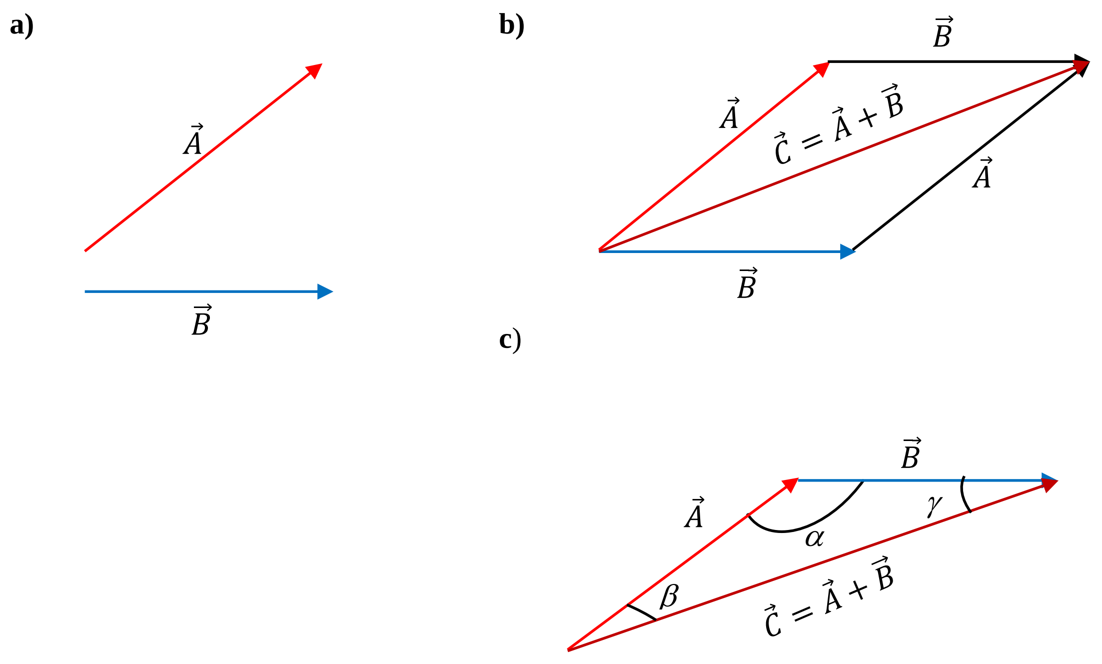


Fig. 1.2 Addition de deux vecteurs quelconques.

Remarque

La construction de la somme de deux vecteurs peut être réalisé soit :

- Par un parallélogramme (loi du parallélogramme) (Fig. 1.2b).
- Ou par un triangle (loi du triangle), en dessinant le deuxième vecteur à partir de l'extrémité du premier. Le vecteur somme représente le troisième côté du triangle (Fig. 1.2c).
- Dans le cas où les vecteurs sont parallèles, on a la figure suivante (Fig. 1.3).

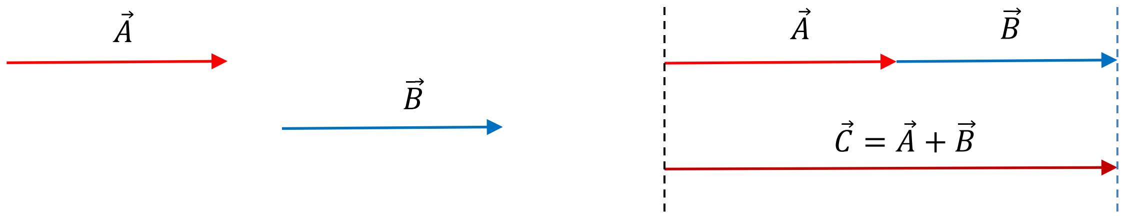


Fig. 1.3 Addition de deux vecteurs parallèles.

1.2.2 Formules utiles pour l'addition de deux vecteurs

Les formules suivantes (ou formules des sinus) permettent de calculer les modules de 3 vecteurs coplanaires liés par une addition telle que (Fig. 1.2c) :

$$\frac{A}{\sin\gamma} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\alpha} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{B^2 + C^2 - 2BC\cos\gamma} \\ B = \sqrt{A^2 + C^2 - 2AC\cos\beta} \\ C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha} \end{cases} \tag{1.3}$$

1.2.3. Soustraction

La soustraction de deux vecteurs *A* et *B* (Fig. 1.4) est comme suit, en utilisant la loi du triangle :

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right) \tag{1.4}$$

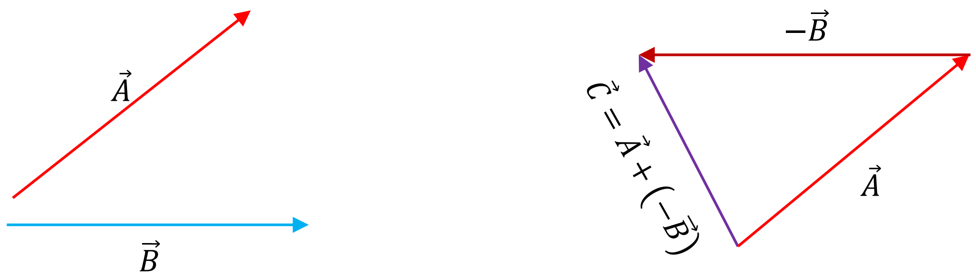


Fig. 1.4 Soustraction de deux vecteurs quelconques.

1.2.4. Commutativité

L'opération d'addition est commutative (Fig. 1.5) si :

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}=\vec{C} \tag{1.5}$$

1.2.5. Associativité

L'opération d'addition entre trois vecteurs (et plus) (Fig. 1.6) est associative si on a :

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{C}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{C}\right) \tag{1.6}$$

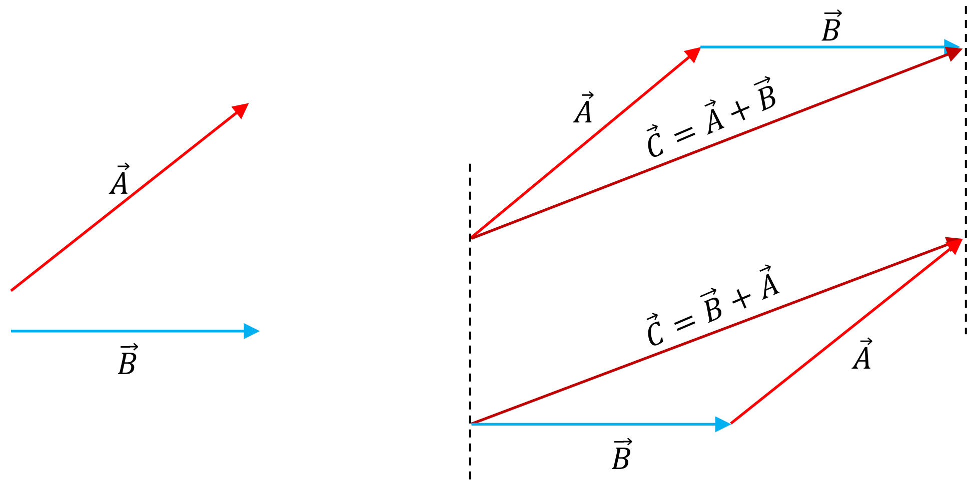


Fig. 1.5 Commutativité.

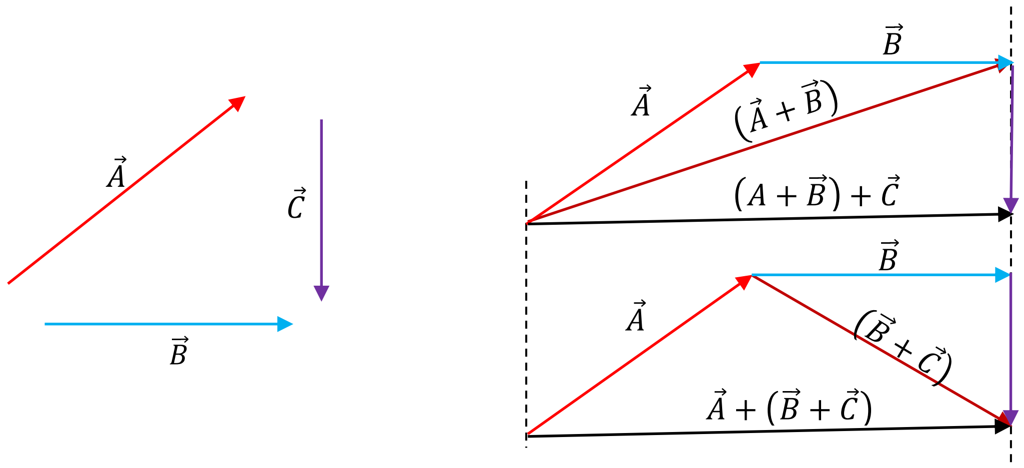


Fig. 1.6 Associativité.

1.2.6. Multiplication d'un vecteur par un scalaire

$$\vec{D}=\vec{A}+\cdots+\vec{A}=k\vec{A} \tag{1.7}$$

Remarque

Si on a un vecteur tel que $\left(\vec{D} = 0.5\vec{A}\right)$, alors le module de $\vec{D}$ sera $(0.5A)$.

1.3 Composantes d'un vecteur

1.3.1 Dans le plan

Dans un repère orthonormé (OXY) et de base unitaire $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, un vecteur d'origine O a deux composantes au plus (Fig. 1.7), et on peut les écrire de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_X} + \overrightarrow{OM_Y} = X_M\vec{\imath} + Y_M\vec{\jmath} \tag{1.8}$$

$$OM = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2} \tag{1.9}$$

$$\cos\alpha = \frac{X_M}{OM};\cos\beta = \frac{Y_M}{OM} \tag{1.10}$$

α, β sont les angles directeurs du vecteur $\overrightarrow{OM}$ $(-\pi\leq\alpha\leq\pi\ ,\ -\pi\leq\beta\leq\pi)$.

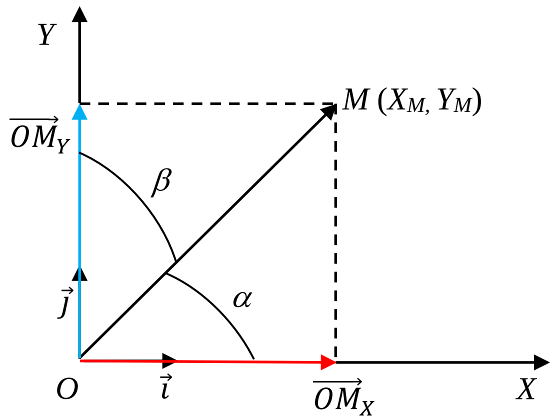


Fig. 1.7 Composantes d'un vecteur dans le plan (2D).

Exercice d'application

Calculer le module et la direction de $\vec{V}$ ayant pour composantes 3 suivant X et 4 suivant Y.

Solution

$\vec{V} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

$V = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25}=5$

$\cos\alpha = \dfrac{3}{5} = 0.6 \;\Rightarrow\; \alpha = 53.13°$

$\beta = 90° - 53.13° = 36.87°$

1.3.2 Dans l'espace

Dans un repère orthonormé $(OXYZ)$ et de base unitaire $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, un vecteur d'origine O a trois composantes au plus et peut s'écrire de la façon suivante (Fig. 1.8) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_X + \overrightarrow{OM}_Y + \overrightarrow{OM}_Z = X_M\vec{\imath} + Y_M\vec{\jmath} + Z_M\vec{k} \quad (1.11)$$

$$OM = \sqrt{OM_X^2+OM_Y^2+OM_Z^2} = \sqrt{X_M^2+Y_M^2+Z_M^2} \quad (1.12)$$

Si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire d'$\overrightarrow{OM}$, alors: $\overrightarrow{OM} = OM\vec{u}$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{X_M}{OM} \\ \cos\beta = \frac{Y_M}{OM} \\ \cos\gamma = \frac{Z_M}{OM} \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ \vec{u} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \cos\beta\,\vec{\jmath} + \cos\gamma\,\vec{k} \end{cases} \quad (1.14)$$

α, β, γ sont les angles directeurs du vecteur $\overrightarrow{OM}$ ($-\pi\leq\alpha\leq\pi$, $-\pi\leq\beta\leq\pi$, $-\pi\leq\gamma\leq\pi$).

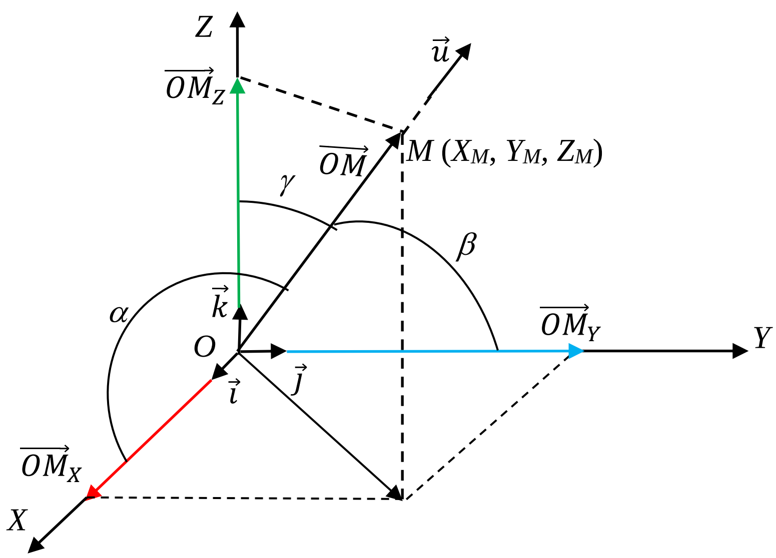


Fig. 1.8 Coordonnées cartésiennes, ou composantes d'un vecteur dans l'espace (3D).

Exercice d'application

Calculer le module et la direction de $\vec{V}$ ayant pour composantes (3 ; 4 ; 5).

Solution

On écrit que :

$\vec{V} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$

$V = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{50}} = 0.42 \Rightarrow \alpha = 65°$

$$\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{50}} = 0.57 \Rightarrow \beta = 56°$$

$$\cos\gamma = \frac{5}{\sqrt{50}} = 0.71 \Rightarrow \gamma = 45°$$

$$\vec{u} = 0.42\vec{\imath} + 0.57\vec{\jmath} + 0.71\vec{k}$$

Vérification

$$0.42^2 + 0.57^2 + 0.71^2 \approx 1$$

1.3.3 Composantes d'un vecteur à partir de deux points définis sur sa ligne d'action

Dans des applications telles que les charges dans les tours, le support d'un vecteur est défini par les coordonnées de deux points situés sur sa ligne d'action (Fig. 1.9). Dans cette figure, le vecteur $\vec{V}$ est défini par les deux points O et A de sa ligne d'action. D'après l'équation 1.13 on a :

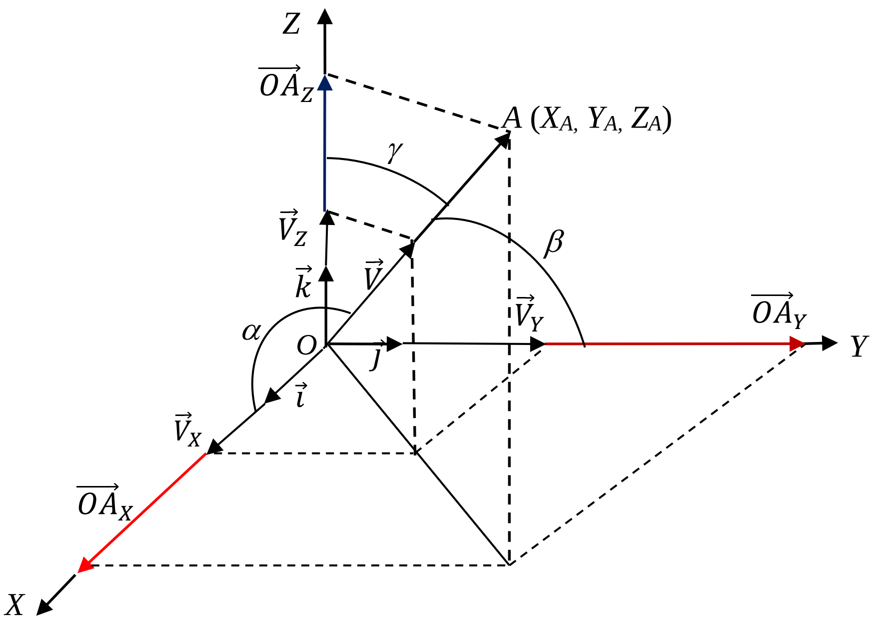


Fig. 1.9 Composantes d'un vecteur dans l'espace (3D) à partir de deux points définis sur sa ligne d'action.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{OA_X}{OA} = \frac{V_X}{V} \\ \cos\beta = \frac{OA_Y}{OA} = \frac{V_Y}{V} \\ \cos\gamma = \frac{OA_Z}{OA} = \frac{V_Z}{V} \end{cases} \tag{1.15}$$

On déduit les composantes du vecteur $\vec{V}$ par :

$$\begin{cases} V_X = V.\frac{OA_X}{OA} \\ V_Y = V.\frac{OA_Y}{OA} \\ V_Z = V.\frac{OA_Z}{OA} \end{cases} \tag{1.16}$$

Exemple d'application

Un hauban de longueur AB est ancré au sol au point A (Fig. 1.10). La tension sur le hauban vaut $3kN$. Calculer les composantes de l'action du hauban en A.

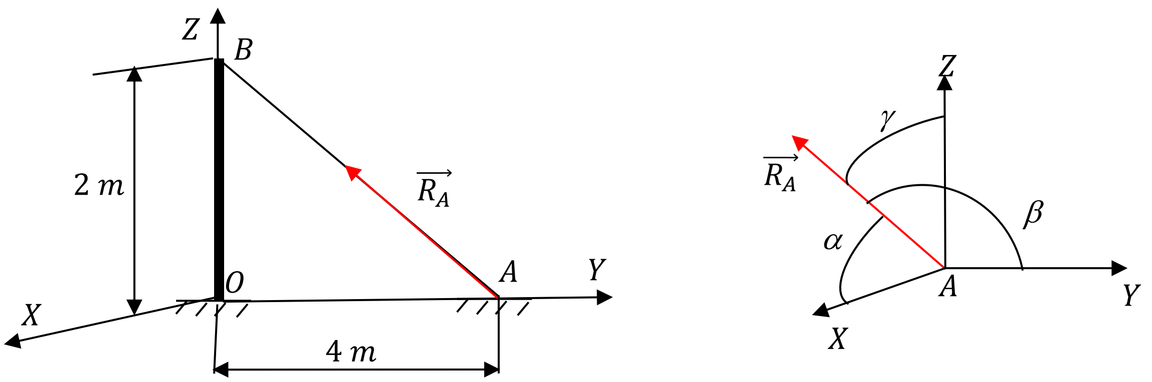


Fig. 1.10 Exemple d'application.

Solution

$$\overrightarrow{AB} = AB_X\vec{\imath} + AB_Y\vec{\jmath} + AB_Z\vec{k}$$

$$AB_X = X_B - X_A = 0m;\ AB_Y = Y_B - Y_A = -4\ m;\ AB_Z = Z_B - Z_A = 2\ m$$

$$AB = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}m$$

$$R_{AX} = R_A.\frac{AB_X}{AB} = 3.\frac{0}{\sqrt{20}} = 0$$

$$R_{AY} = R_A.\frac{AB_Y}{AB} = 3.\frac{-4}{\sqrt{20}} = -2.6\ kN$$

$$R_{AZ} = R_A.\frac{AB_Z}{AB} = 3.\frac{2}{\sqrt{20}} = 1.34\ kN$$

1.4 Addition des vecteurs analytiquement

Soit n vecteurs $(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3} \dots, \vec{V_n})$ formant une somme vectorielle $(\vec{R})$**.** Chaque vecteur $\vec{V_\imath}$ peut-être écrit dans un repère orthonormé de la manière suivante :

$$\vec{R} = R_X\vec{\imath} + R_Y\vec{\jmath} + R_Z\vec{k} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} + \cdots + \vec{V_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_\imath} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_{iX} + \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_{iY} + \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_{iZ} \tag{1.17}$$

$$R_X = \sum_1^n V_{iX}\ ,\ R_Y = \sum_1^n V_{iY}\ ,\ R_Z = \sum_1^n V_{iZ} \tag{1.18}$$

Donc, le vecteur somme est obtenue en ajoutant les coordonnées du même axe entre elles.

Exemple

Déterminer la somme de trois vecteurs dont les composantes sont les suivantes :

$\vec{V_1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{V_2}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \vec{V_3}\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$

Solution

$$R_X = \sum_1^n V_{iX} = 1 + 4 + 7 = 12$$

$$R_Y = \sum_1^n V_{iY} = 2 + 5 + 8 = 15$$

$$R_Z = \sum_1^n V_{IZ} = 3 + 6 + 9 = 18$$

$$R = \sqrt{12^2 + 15^2 + 18^2} = \sqrt{693}$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{693}} = 0.456 \Rightarrow \alpha = 62.9°$$

$$\cos\beta = \frac{15}{\sqrt{693}} = 0.570 \Rightarrow \beta = 55.2°$$

$$\cos\gamma = \frac{18}{\sqrt{693}} = 0.684 \Rightarrow \gamma = 46.8$$

$$0.456^2 + 0.570^2 + 0.684^2 \approx 1$$

$$\vec{u} = 0.456\vec{\imath} + 0.570\vec{\jmath} + 0.684\vec{k}$$

1.5 Produit scalaire

1.5.1 Définition

Le produit scalaire sert à calculer les projections d'un vecteur $\vec{V}$ sur des axes munis de vecteurs unitaires (Fig. 1.11).

$$\begin{cases} V_X = \vec{V}.\vec{\imath} = V.1.\cos\alpha = V\cos\alpha \\ V_Y = \vec{V}.\vec{\jmath} = V.1.\cos\beta = V\cos\beta \end{cases} \quad (1.19)$$

L'angle directeur α est compris entre les supports des deux vecteurs $(\vec{V},\vec{\imath})$ Aussi, l'angle directeur β est compris entre les supports des deux vecteurs $(\vec{V},\vec{\jmath})$. N'oublions pas les conditions ($-\pi \le \alpha \le \pi$ et $-\pi \le \beta \le \pi$). Le produit scalaire peut être calculé à partir des composantes des deux vecteurs tel que :

$$\begin{cases} \vec{V}.\vec{\imath} = (V_X\vec{\imath} + V_Y\vec{\jmath})(1.\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath}) = V_X.1 = V_X \\ \vec{V}.\vec{\jmath} = (V_X\vec{\imath} + V_Y\vec{\jmath})(0.\vec{\imath} + 1.\vec{\jmath}) = V_Y.1 = V_Y \end{cases} \quad (1.20)$$

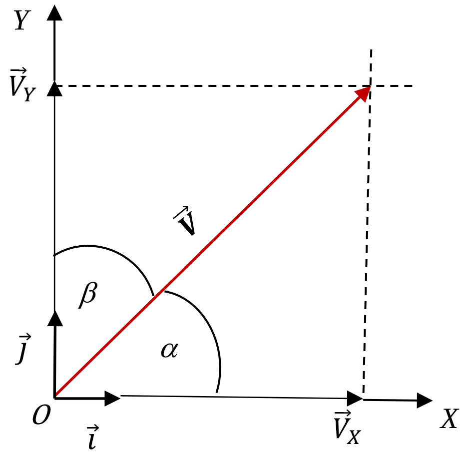


Fig. 1.11 Produit scalaire de deux vecteurs.

1.5.2 Propriétés du produit scalaire

- $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ (commutative);
- Si α=90° (les deux vecteurs sont perpendiculaires), alors le produit scalaire est nul ;
- $\vec{A}.\left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$ (distributive) ;
- $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1.$

Exemple

Déterminer le produit scalaire des vecteurs dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

$\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

Solution

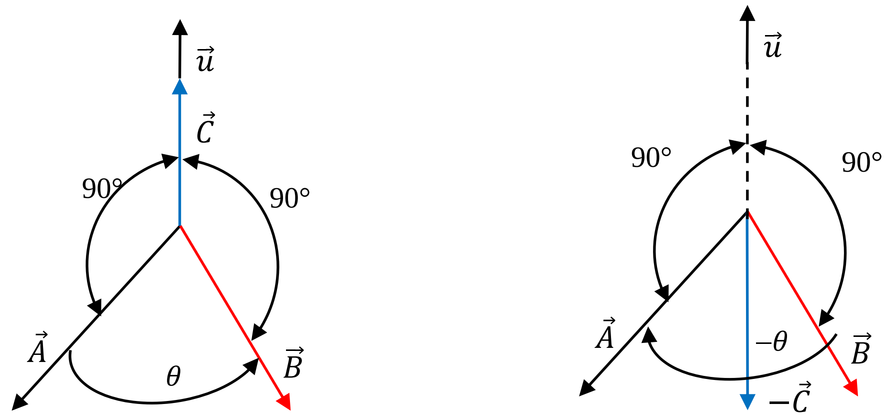
$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = (1\times4) + (2\times5) + (3\times6) = 32$

1.6 Produit vectoriel

1.6.1. Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur et peut être interprété comme suit (Fig. 1.12). Les vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ pris dans cet ordre forment un trièdre direct, comme c'est le cas de la base du repère (*OXYZ)* est $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \overrightarrow{k)}.$ Par exemple, le produit vectoriel sert à calculer un moment par rapport à un point. Il n'est pas commutatif.

$$\vec{C} = C.\vec{u} = \vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A} = A.B.\sin\theta\,.\vec{u} \qquad (1.21)$$



$\vec{C} = C.\vec{u} = \vec{A} \wedge \vec{B} = A.B.\sin\theta\,.\vec{u}$ $\vec{B} \wedge \vec{A} = B.A.\sin(-\theta)\,.\vec{u} = -\vec{C} = -C\vec{u}$

Fig. 1.12 Produit vectoriel de deux vecteurs.

1.6.2. Calcul du produit vectoriel à l'aide des composantes

Si $\vec{A} = A_X\vec{\imath} + A_Y\vec{\jmath} + A_Z\vec{k}$ et $\vec{B} = B_X\vec{\imath} + B_Y\vec{\jmath} + B_Z\vec{k}$, alors on a :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = C\vec{\imath} + C_Y\vec{\jmath} + C_Z\vec{k} = (A_YB_Z - A_ZB_Y)\vec{\imath} - (A_XB_Z - A_ZB_X)\vec{\jmath} + (A_XB_Y - A_YB_X)\vec{k} \quad (1.22)$$

Exercice

Déterminer le produit vectoriel des vecteurs dont les coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

$\vec{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{B}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

Solution

$\vec{C} = C.\vec{u} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (2\times6 - 3\times5)\vec{\imath} - (1\times6 - 3\times4)\vec{\jmath} + (1\times5 - 2\times4)\vec{k} = -3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

$C = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{54}$

$\cos\alpha = \dfrac{-3}{\sqrt{54}} = -0.408 \Rightarrow \alpha = 114.1°$

$\cos\beta = \dfrac{6}{\sqrt{54}} = 0.816 \Rightarrow \beta = 35.31°$

$\cos\gamma = \dfrac{-3}{\sqrt{54}} = -0.408 \Rightarrow \gamma = 114.1°$

$(-0.408)^2 + (0.816)^2 + (-0.408)^2 \approx 1$

$\vec{u} = -0.408\vec{\imath} + 0.816\vec{\jmath} - 0.408\vec{k}$