CHAPITRE 2 : NOTIONS DE FORCE, RÉSULTANTE, MOMENT, COUPLE

Objectives du chapitre 2

Les connaissances acquises dans ce chapitre 2 aideront aussi dans l'étude de la mécanique des corps déformables tels que l'analyse des contraintes de la mécanique du solide et de la mécanique des fluides. Aussi, il est jeté les bases d'une compréhension fondamentale non seulement de la statique, mais aussi de l'ensemble du sujet de la mécanique rationnelle. Dans ce chapitre la force est décrite comme une quantité vectorielle puis décomposée en projections puis Additionnées pour déterminer la résultante de forces multiples agissant sur un solide. Aussi, dans cette partie du cours, Il est défini aussi le concept de moment d'une force par rapport à un point et par rapport à un axe et la notion de couple. Donc, Il faut maitriser cette partie du cours de manière approfondie pour pouvoir aborder les exercices proposés et les prochains chapitres.

2.1 Notions de forces

2.1.1 Définition

En mécanique rationnelle, les forces sont utilisées pour schématiser des charges et des réactions concentriques d'actions mécaniques diverses. Ces forces sont représentées par des vecteurs (voir Chapitre 1).

2.1.2 Classement des forces

Les forces peuvent être classées en deux catégories :

- Les forces à distance (pas de contact entre les corps) tels que la force électromagnétique et le poids.
- Les forces de contact qui agissent sur une surface (action d'un marteau sur un mur, frottement, etc.).

2.2 Force à distance

Elles sont de deux types: attraction terrestre et électromagnétique. Dans notre cas, le poids qui est dû à l'attraction terrestre est le seul à considérer. Le poids d'un objet est égal à la force d'attraction gravitationnelle exercée par la terre. Cette force de pesanteur est caractérisée par son centre de gravité *G (*ou centre d'inertie) du corps, une direction verticale passant par *G*, un sens allant vers le bas et on a:

$$\vec{P} = M.\vec{g} \tag{2.1}$$

$$g = g_0 \frac{R^2}{R^2+H^2} \tag{2.2}$$

G : accélération terrestre (g_0=9.81m/s^2)

R : rayon de la terre (6378000*m*)

H : altitude (*m*)

2.3 Force de contact

Si l'effort de contact est réparti le long d'une ligne de longueur *L*, la force est schématisée par une charge *F* issue d'une répartition de charge *q*, dite linéique, mesurée en *N/m* (Fig. 2.1a).

$$F = \int_L q.dl \tag{2.3}$$

Et si elle est repartie sur une surface, on a *q* (dite surfacique), mesurée en N/m^2 (Fig. 2.1 b).

$$F = \int_S q.dS \tag{2.4}$$

Puis si elle est repartie sur un volume, alors *q* est en N/m^3 (Fig. 2.1 c) :

$$F = \int_V q.dV \tag{2.5}$$

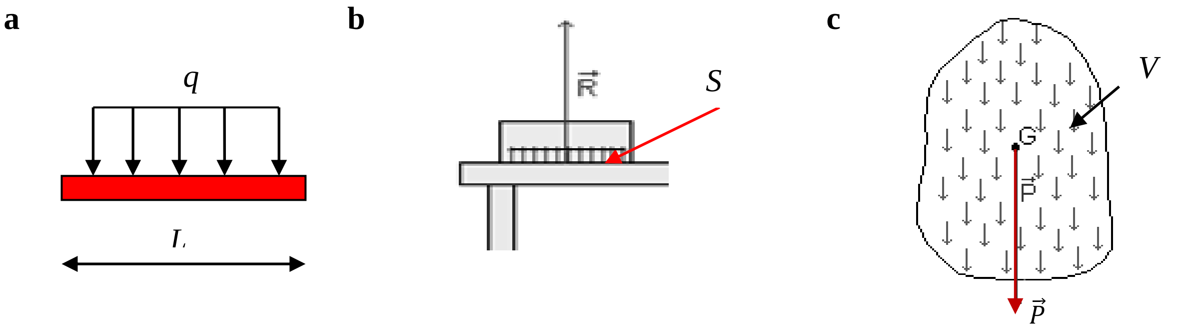

Fig.2.1 Forces réparties.

2.4 Schématisation d'une force

Pour étudier les actions mécaniques, il est possible de simuler leurs caractéristiques sous une forme mathématique. Mais avant toute chose, ces actions mécaniques doivent être schématisées par des vecteur-forces concentriques sur le système matériel. Par exemple, le vecteur-force $\vec{F}$représente l'action du pied en A sur le ballon suivant un angleα. Tandis que$\vec{P}$représente le poids du ballon en G (Fig. 2.2).

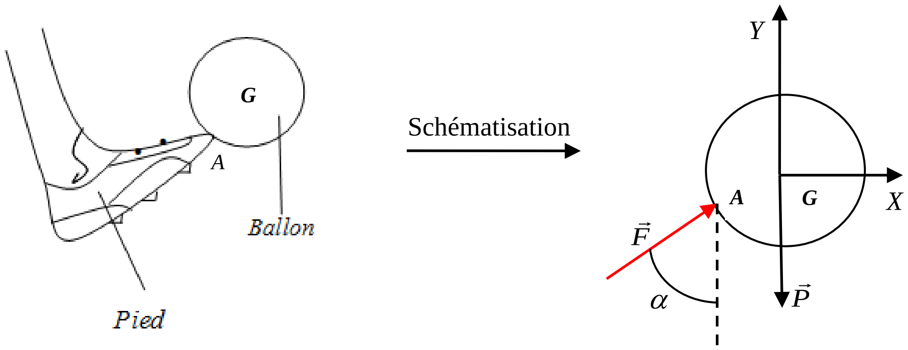

Fig. 2.2 Schématisation d'un vecteur-force.

2.5 Décomposition d'une force

2.5.1 Plan (2D)

Aussi, comme il a été indiqué pour le vecteur dans le chapitre 1, une force peut être remplacée par 2 composantes selon les directions choisies dans un repère plan orthonormé (OXY).

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_X} + \overrightarrow{F_Y} \tag{2.6}$$

2.5.2 Espace (3D)

Une force peut être remplacée par 3 composantes selon les directions choisies dans un repère spatial orthonormé ($OXYZ$).

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_X} + \overrightarrow{F_Y} + \overrightarrow{F_Z} \tag{2.7}$$

Exemple d'application

Calculer les coordonnées cartésiennes de$\vec{F}$dans le repère orthonormé (*OXY)* si l'angle compris entre (*OX)* et la force vaut 60°, *F*=100*N*.

Solution

<u>1</u>

1ere méthode (produit scalaire)

Utiliser les angles directeurs. Comme on a les conditions suivantes pour les angles directeurs (−π≤angle≤π)

Alors, on a les angles directeurs par rapport aux axes *x* et *y* respectivement α=30°et β=60°.

$F_X = \vec{F}.\vec{\imath} = 100 \times 1 \times cos\,30°$

$F_X = 86.60N$

$F_Y = \vec{F}.\vec{\jmath} = 100.1.\,cos\,60°$

$F_Y = 100 \times 0{,}5 = 50N$

2eme méthode (trigonométrie)

$F_X = F.\,cos\,30° = 86.60N$

$F_Y = F.\,sin\,30° = 50N$

2.6 Moment d'une force par rapport à un point

Le moment d'une force par rapport à un point traduit l'effet de rotation de cette force par rapport à ce point. Si le support de la force passe par le point, c'est une translation et le cas contraire est une rotation. Le moment par rapport à un point *O* se calcule de la manière suivante (Fig. 2.3) :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_{OZ}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = (OA.F.\sin\theta)\vec{u} = (F.d)\vec{u} \qquad (2.8)$$

Le vecteur moment $\vec{M}_O$ a pour support la droite perpendiculaire au plan (*Π*) et un sens obtenu par la règle des trois doigts de la main droite. Le sens antihoraire sera choisi comme le sens positif des moments c'est-à-dire vers *Z* positif.

Remarque

Le moment d'une force par rapport à un point peut être nul seulement dans le cas où la distance *d* est nulle (la force passe par le point de rotation).

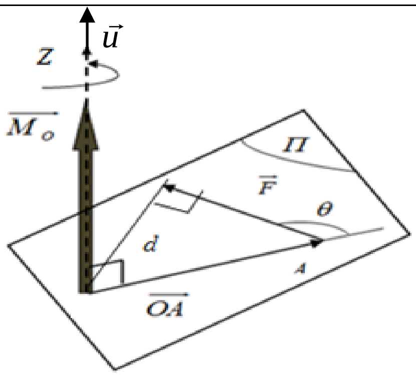

Fig. 2.3 Principales caractéristiques du moment par rapport à un point.

2.6.1 Théorème de Varignon

Ce théorème stipule que le moment d'une résultante $\vec{R}$par rapport à un point est égal à la somme des moments de ses composantes ($\vec{R}_X$,$\vec{R}_Y$) par rapport au même point (Fig. 2.4).

$$\vec{R} = \vec{R}_X + \vec{R}_Y \tag{2.9}$$

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O(\vec{R}_X) + \vec{M}_O(\vec{R}_Y) \tag{2.10}$$

En valeur algébrique, on obtient :

$$M_O(\vec{R}) = -R_X.D_X + R_Y.D_Y \tag{2.11}$$

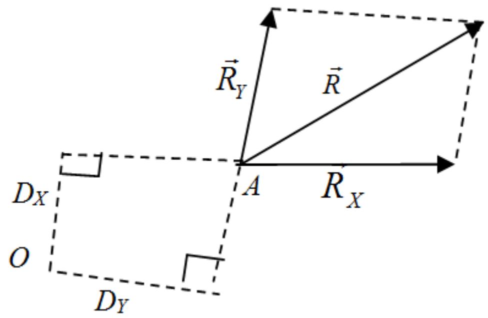

Fig. 2.4 Moment d'une force par rapport à un point d'après le théorème de Varignon.

2.7 Composantes d'un moment par rapport à un point

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} \\ \vec{F} = \overrightarrow{F_X} + \vec{F}_Y + \overrightarrow{F_Z} \\ \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}_X + \overrightarrow{OA}_Y + \overrightarrow{OA_Z} \end{cases} \tag{2.12}$$

Les composantes du moment $\overrightarrow{M_O}$sont obtenues à partir du calcul du produit vectoriel.

$$\begin{cases} \vec{M}_O = \vec{M}_{OX} + \vec{M}_{OY} + \vec{M}_{OZ} \\ M_{OX} = OA_Y.F_Z - OA_Z.F_Y \\ M_{OY} = OA_Z.F_X - OA_X.F_Z \\ M_{OZ} = OA_X.F_Y - OA_Y.F_X \end{cases} \tag{2.13}$$

Les composantes du moment $\vec{M}_O$représentent les moments par rapport aux axes du repère orthonormé (*OXYZ)*.

Exemple d'application

Calculer le moment $\vec{M}_O(\vec{F})$de la force représentée sur la figure 2.5 par rapport au point *O*. *F*=100*N*, *OA*=24cm, α=60°.

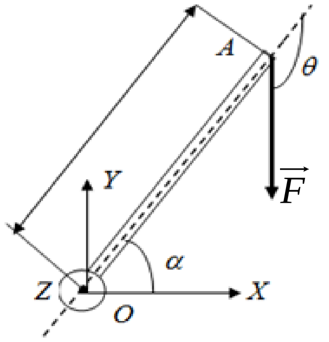

Fig. 2.5 Exemple d'application.

Solution

1ere méthode

Il faut utiliser l'équation 2.8. Apres application des données de l'exercice, le module du moment est:

$$M_O = OA.F.\sin\theta = 0{,}24 \times 100.\sin(-150°) = -12Nm$$
$$M_O = M_{OZ} = -12Nm$$

La force engendre une rotation de signe négatif.

2eme méthode

Il faut utiliser le déterminant du produit vectoriel (Eq. 2.13). Après Application des données de l'exercice, les résultats sont les suivants :

$$\vec{F} = 0\vec{\imath} - 100\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OA} = 0.24.\cos(60)\,\vec{\imath} + 0.24.\sin(60)\,\vec{\jmath}$$

$\overrightarrow{OA} = 0.12\vec{\imath} + 0.21\vec{\jmath}$

$$\vec{M}_{OZ} = (OA_X.F_Y - OA_Y.F_X)\vec{k} = (-0.12 \times 100 - 0.21 \times 0)\vec{k}$$

$$\vec{M}_{OZ} = -12\vec{k}$$

$$M_O = M_{OZ} = -12Nm$$

3eme méthode

On peut utiliser le théorème de Varignon. Il faut déterminer les composantes de la force:

$\begin{cases} F_X = 0 \\ F_Y = -100 \end{cases}$

$$\begin{cases} M_O = M_O(\vec{F}_X) + M_O(\vec{F}_Y) \\ M_O = -100 \times 0.24 \times \cos 60 = -12Nm \end{cases}$$

2.8 Moment par rapport à un axe quelconque

Le moment $\vec{M}_u$ par rapport à un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$est le produit scalaire du moment $(\overrightarrow{M_O}\ (\vec{F})$ et le vecteur unitaire $\vec{u}$ (Fig. 2.6).

$$M_u = \vec{M}_o.\vec{u} = M_O.\cos\alpha \qquad (2.14)$$

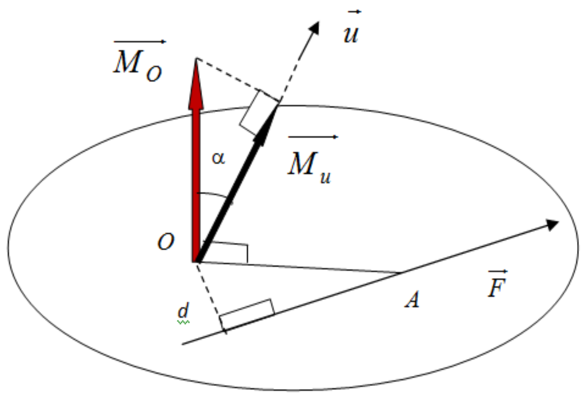

Fig. 2.6 Moment par rapport à un axe quelconque.

2.9 Notions de couple

2.9.1 Définition

Deux forces $(\vec{F},\vec{F'})$ de même modules $(F = F')$ et de sens opposés $(\vec{F} = -\vec{F'})$, ayant des lignes d'action parallèles engendrent un moment appelé couple.

L'intensité du couple est indépendante du point de rotation B (Fig. 2.15). Son module ne dépend que de la distance d entre les deux forces et de l'intensité de la force F. Le sens du couple est déterminé par la méthode du tire-bouchon (voir chapitre 1).

$$\begin{cases} \vec{M} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F'} + \overrightarrow{BC} \wedge \vec{F} \\ M = F'.d_1 - F.d_2 \\ M = F.(d_1 - d_2) \\ M = F.d \end{cases} \qquad (2.15)$$

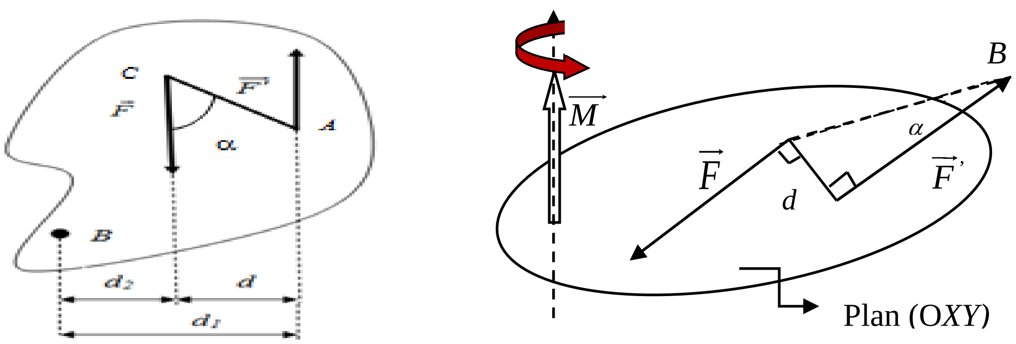

Figure 2.7 Schéma d'un couple.

2.9.2 Propriétés du couple

L'intensité d'un couple ne change pas dans les cas suivants:

• La valeur d'un couple *M* reste identique si on modifie dans des proportions égales et inverses l'intensité des forces et la distance *d* (Fig. 2.8).

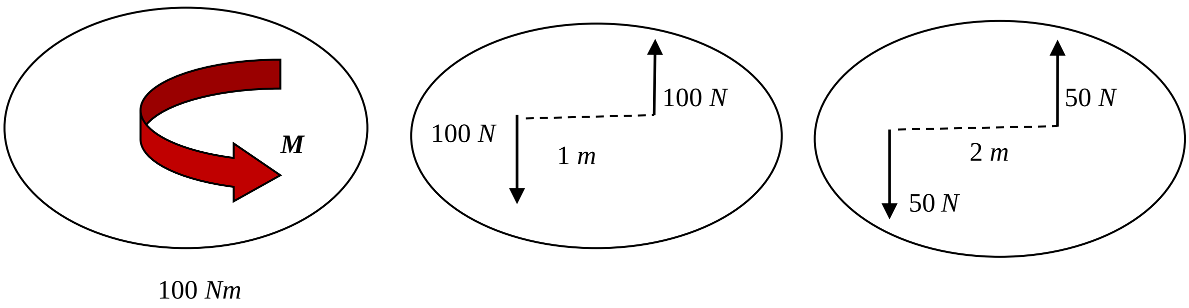

Fig. 2.8 Propriété d'un couple.

• Si on déplace les forces dans des plans parallèles en conservant la distance *d*.

• Aussi, elle ne change pas si on fait tourner les forces ensemble sur des plans parallèles selon le sens de rotation du couple (Fig. 2.9).

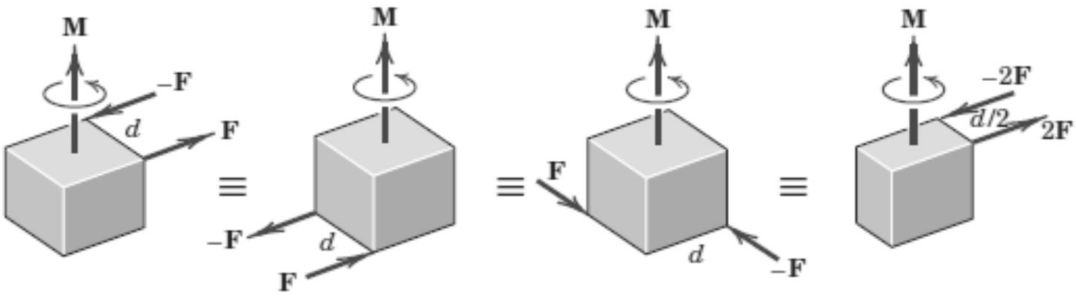

Fig. 2.9 Propriétés d'un couple.

Exemple d'application

Un solide est soumis à un couple d'une force d'intensité 100*N*. Calculer l'angle θ à l'équilibre si *P*=400N (Fig. 2.9).

Solution

$100\times0.1=400\times0.04\times\cos\theta$

$$\cos\theta=\frac{100\times0.1}{400\times0.04}=0.625$$

$\theta=51.32°$

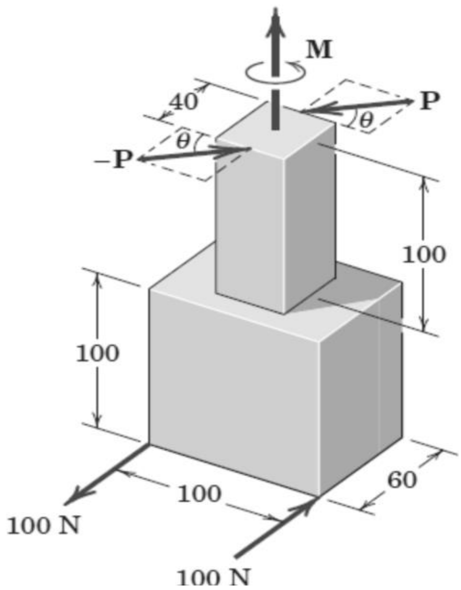

Fig. 2.9 Exemple d'application.