# *CHAPITRE 3 : ÉQUILIBRE DES CORPS HOMOGÈNES ET RIGIDES*

# *Objectives du chapitre 3*

Ce chapitre 3 présente l'étude des corps homogènes et rigides et des mécanismes indéformables à l'état d'équilibre (au repos). Il est possible de déterminer à partir, par exemple, d'une action connue comme, la pesanteur, l'effet de l'allongement d'un ressort, ou une force électromagnétique, les autres actions mécaniques inconnues telles que les actions de liaison, ou de frottement...) exercées au sein du mécanisme, afin de dimensionner les différentes pièces telles que les éléments constituants les liaisons (coussinet, paliers lisses, roulements, vérin ou moteur. La statique traite principalement de la description des conditions des forces nécessaires et suffisantes pour maintenir l'équilibre des systèmes matérielles d'ingénierie. Ce chapitre constitue donc la partie la plus importante de la statique, et les procédures développées ici forment la base de la résolution des problèmes de statique. Nous utiliserons continuellement les concepts développés au chapitre 1 et 2 concernant les vecteurs et les forces, les moments, les couples et les résultantes lorsque nous appliquerons les principes de l'équilibre.

## 3.1 Forces extérieures et intérieures

Lorsqu'on considère l'équilibre absolu des systèmes matériels, on distingue deux types de forces : les forces extérieures et les forces intérieures.

### 3.1.1 Forces extérieures

Les forces extérieures sont celles qui sont exercées par les objets extérieurs au système matériel ou le corps rigide considéré ou isolé. Elles déterminent à elles seules le comportement extérieur du corps en question, c'est-à-dire qu'elles peuvent le mettre en mouvement ou au contraire le maintenir au repos. Dans la suite de ce chapitre, c'est les seuls forces qui seront considérées.

### 3.1.2 Forces intérieures

Ce sont toutes les forces qui proviennent de l'intérieur des corps rigides qui constituent le système matériel. Toutes les forces sont des forces intérieures sauf les actions à distance telle que le poids. Pour illustrer la notion de force extérieure et intérieure, prenons l'exemple de la figure 3.1. La force $\vec{P}$ dont le point d'application est $G$ est une force extérieure, qui provient de l'attraction terrestre. Le sol réagit au poids du camion en exerçant les forces de réaction $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ sur les points de contact des roues. Ces forces, appliquées par le sol sur le camion, font partie des forces extérieures agissantes sur le véhicule.

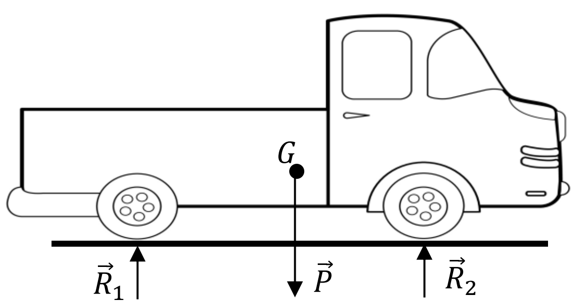



**Fig. 3.1 Forces extérieures.**

## 3.2 Liaisons mécaniques usuelles

Comme il a été cité dans le paragraphe précédent, les forces intérieures proviennent des contacts nommés communément liaisons mécaniques. Elles sont de deux types: non permanentes et permanentes.

- Liaisons non permanentes telles que : l'appui simple, appui plan, articulation cylindrique ou palier. Dans le cas de l'appui simple et de l'appui plan (Fig. 3.2a), la ligne d'action de la force extérieure est perpendiculaire au plan tangent à l'appui. Le sens du vecteur est aléatoire, mais il serait bénéfique pour ne pas commettre des erreurs lors des projections des forces de le prendre suivant le sens positif de l'axe. Pour le bras et le câble dont la masse est négligé, la ligne d'action est dirigée le long de l'objet considéré (Fig. 3.2b). Le palier doit être remplacé par un couple et deux forces radiales. Dans certains problèmes, il est supposé que le frottement est négligé, donc il faut négliger le couple (Fig. 3.2c). Pour l'articulation cylindrique, il faut remplacer la réaction par ses deux composantes rectangulaires (Fig. 3.2d).

• Liaisons permanentes telles que: l'encastrement et la soudure (Fig. 3.2e), la réaction de la liaison sera remplacée par un couple et deux composantes rectangulaires. Le couple provient de la partie encastrée qui est considérée comme une charge repartie.

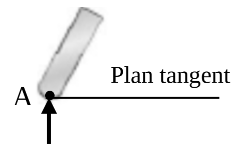
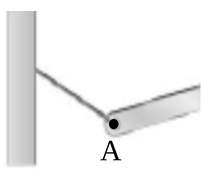
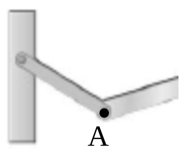
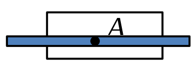
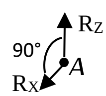
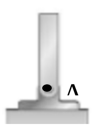
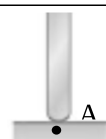
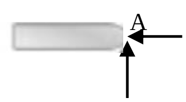
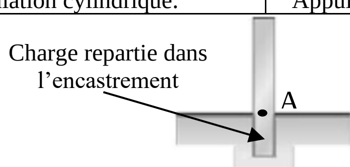
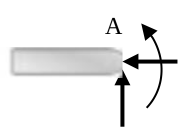
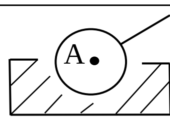
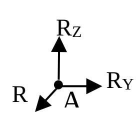
| | Liaisons et appuis | | Schéma de la réaction | Inconnues | |
|---|---|---|---|---|---|
| **a** |   |  |   | 2D | 1 |
| | | | | 3D | 1 |
| | Appui simple sans frottement. | Appui plan. | Ligne d'action connue. | | |
| **b** |   |   |   Ligne d'action du câble | 2D | 1 |
| | | | | 3D | 1 |
| | Câble de masse négligeable. | Barre de masse négligeable. | Ligne d'action connue. | | |
| **c** |   | |   | 2D | 1 |
| | | | | 3D | 2 |
| | Palier lisse | | Ligne d'action inconnue. | | |
| **d** |  |   |   | 2D | 2 |
| | | | | 3D | 2 |
| | Articulation cylindrique. | Appui avec frottement. | Ligne d'action inconnue. | | |
| **e** |   | |   | 2D | 3 |
| | | | | 3D | 3 |
| | Encastrement ou soudure | | Ligne d'action inconnue | | |
| |   | |   | 3D | 3 |
| | Rotule | | inconnue | | |

**Fig. 3.2 Liaisons et appuis**

## 3.3 Conditions d'équilibre dans le plan (2D)

Les conditions d'équilibre sont simples à écrire pour une structure plane. En supposant que les axes *X* et *Y* sont dans le plan de la structure On a:

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_{1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0} \end{cases} \tag{3.1}$$

Le point *O* correspond à l'origine du repère orthonormé ou à un point quelconque de la structure. Le système de deux équations vectorielles fournit trois équations algébriques pour une solution de trois inconnues au maximum.

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} F_{iX} = 0 \quad ; \quad \sum_{1}^{n} F_{iY} = 0 \\ \sum_{1}^{n} M_{iOZ} = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

## 3.4 Schéma du corps isolé

Lorsqu'on considère l'équilibre d'un corps rigide, il faut tenir compte de toutes les forces extérieures agissantes sur le corps et exclure toute force qui ne s'applique pas directement à lui. Il suffit d'oublier une force ou d'en mettre une en trop pour ne pas respecter les conditions d'équilibre. Pour ces raisons, on dessine d'abord et avant tout le schéma du corps isolé. Cependant, vu son importance dans cette étude de l'équilibre absolu, il est résumé ici:

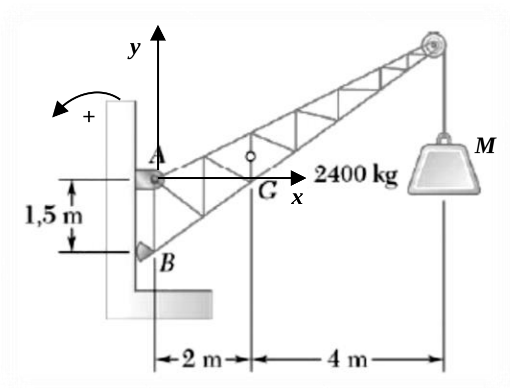
- Le corps à isoler est choisi d'abord judicieusement, puis il est détaché du sol et des autres éléments auxquels il est lié. Puis ensuite le contour du corps isolé est tracé.
- Toutes les forces extérieures sont mentionnées sur le dessin. Elles représentent les actions exercées sur le corps isolé par le sol et par les autres corps dont il est libéré. Ces forces s'appliquent aux points de contact avec le sol et avec les autres éléments. Elles incluent le poids du corps puisqu'il exprime l'attraction de la terre sur l'ensemble des éléments qui constituent le mécanisme. Si le corps isolé comprend plusieurs parties, les forces exercées par ces parties les unes sur les autres sont des forces intérieures au corps isolé.
- Il est montré précisément sur le dessin les caractéristiques vectorielles des forces extérieures connues.
- On inclut également sur le schéma du corps isolé les dimensions qui pourront servir au calcul des moments des forces. Tout autre détail inutile n'est pas mentionné sur le dessin.

## Exemple d'application

Une grue fixe ayant une masse de 1000*kg* ($g=9,81 m/s^2$) peut soulever une caisse de 2400*kg*. La grue est tenue en situation d'équilibre absolu par une rotule au point *A* et un appui simple à bascule au point *B*. Son centre de gravité est situé au point *G*. Déterminez les réactions sur les liaisons *A* et *B*.

## Solution

$$\begin{cases} \sum_{1}^{4} \vec{F}_i = \vec{A} + \vec{B} + \vec{P}_G + \vec{P}_M = \vec{0} \\ \sum_{1}^{4} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = \vec{M}_A(\vec{A}) + \vec{M}_A(\vec{B}) + \vec{M}_A(\vec{P}_G) + \vec{M}_A(\vec{P}_M) = \vec{0} \end{cases}$$




**Mecanisme plan.**

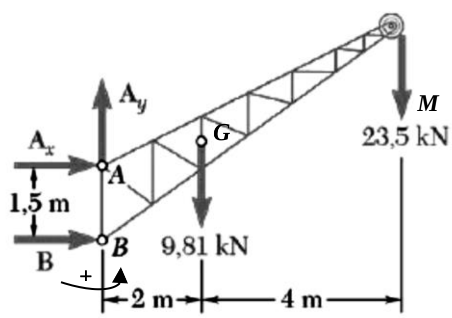



**Schéma du corps isolé.**

**Fig. 3.3 Exemple d'application**

| | $\vec{A}$ | $\vec{B}$ | $\vec{P}_G$ | $\vec{P}_M$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_{ix}$ | $A_x$ | $B$ | $0$ | $0$ |
| $F_{iy}$ | $A_y$ | $0$ | $-P_G$ | $-P_M$ |
| $M_{iAz}$ | $0$ | $1.5B$ | $-2P_G$ | $-6P_M$ |

**Equation 2**

$A_y = P_G + P_M = 9{,}81 + 23.5 = 33kN$

Eq. 3

$$B = \frac{2P_G + 6P_M}{1.5} = 107kN$$

**Equation 1**

$A_x = -B = -107kN$

$$A = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2} = \sqrt{(-107)^2 + (33)^2} = 112kN$$

## 3.5 Équilibre d'un corps soumis à deux forces

Soit le cas particulier où seulement deux forces s'appliquent à un corps rigide en équilibre. Nous prouverons que, lorsqu'un corps soumis à deux forces est en équilibre, les deux forces doivent être de même grandeur mais de sens opposé, et avoir la même ligne d'action. Un corps est soumis à deux forces $\vec{F}$ et $\overrightarrow{F'}$appliquées respectivement en $A$ et $B$ (Fig. 3.4a). Si le corps est en équilibre, la somme des moments des deux forces par rapport à un point quelconque doit être nulle. Additionnons d'abord les moments par rapport à $A$: le moment de $\vec{F}$ étant égal à zéro, le moment de $\overrightarrow{F'}$ doit aussi être nul. La ligne d'action de $\overrightarrow{F'}$ passe alors par $A$ (Fig. 3.4b). Le même raisonnement montrera que pour la somme des moments par rapport à $B$, la ligne d'action de $\vec{F}$ passe par $B$ (Fig. 3.4c). Les deux forces s'appliquent donc sur la même ligne d'action, soit la ligne $AB$. Aussi, les équations d'équilibre exigent que les deux forces soient aussi de même grandeur et de sens opposé.

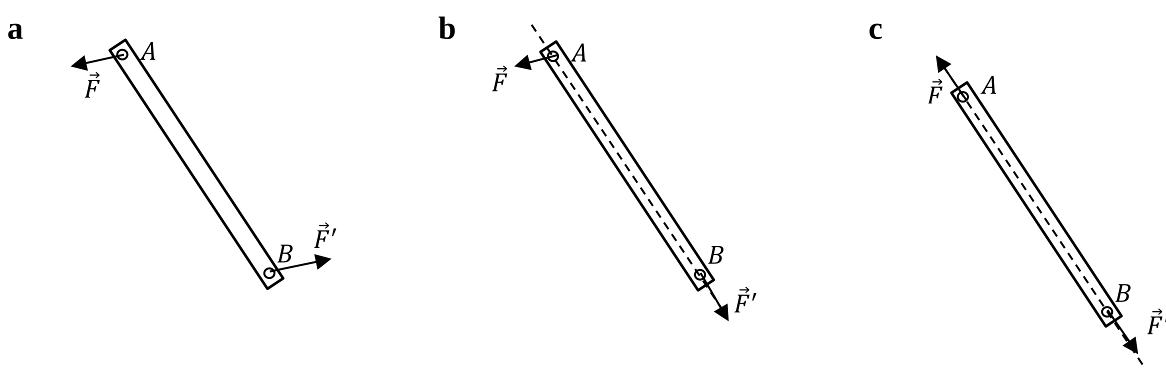



**Fig. 3.4 Forces opposées.**

## 3.6 Équilibre d'un corps soumis à trois forces concourantes coplanaires

C'est le cas d'un corps rigide sous l'action d'un système de forces appliquées en trois points. Pour que le corps soit en équilibre, ces forces doivent être soit concourantes, soit parallèles. Pour résoudre un problème impliquant un corps soumis à trois forces concourantes, il faut tracer le schéma du corps isolé représentant les trois forces en montrant bien qu'elles passent par le même point. Ensuite, un triangle de forces est utilisé pour résoudre le problème à l'aide du théorème des sinus (voir chapitre 1).

## Exemple d'application

Etudier l'équilibre d'une sphère sur un plan incliné. $\alpha$=30°, $P$=100$N$ (Fig. 3.5).

## Solution

Il y'a trois forces concourantes au centre de gravité $G$ dans le plan ($\pi$), donc on utilise la méthode des sinus. Premièrement, Il faut tracer le triangle des forces (Fig. 3.6). Il n'est pas utile d'utiliser une échelle, car ce n'est pas une méthode graphique. Les angles géométriques sont déduits à partir du système matériel.

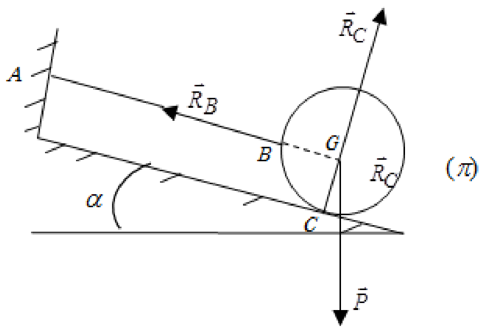



**Fig. 3.5 Exemple d'application.**

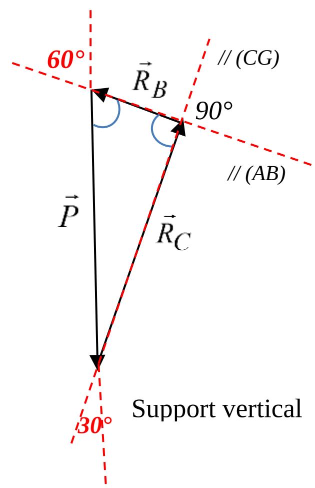



**Fig. 3.6 Triangle des forces.**

On applique la loi des sinus (entre les modules)

$$\frac{R_B}{\sin 30^\circ} = \frac{R_C}{\sin 60^\circ} = \frac{P}{\sin 90^\circ}$$

$$R_B = \frac{P}{\sin 90^\circ}\sin 30^\circ = \frac{100}{\sin 90^\circ}\sin 30^\circ = 50N$$

$$R_C = \frac{P}{\sin 90^\circ}\sin 60^\circ = \frac{100}{\sin 90^\circ}\sin 60^\circ = 87N$$

## Remarque

Attention ne mettez pas des flèches sur les modules. C'est une équation algébrique.

## 3.7 Equilibre dans un espace tridimensionnel (3D)

Les conditions d'équilibre d'un corps rigide dans un espace tridimensionnel se traduisent par deux équations vectorielles comme dans le cas du corps rigide plan (Equations 3.1) et généralement par six équations algébriques.

$$\begin{cases} \sum_{1}^{n} F_{iX} = 0 \quad ; \quad \sum_{1}^{n} F_{iY} = 0 \quad ; \sum_{1}^{n} F_{iZ} = 0 \\ \sum_{1}^{n} M_{iOX} = 0 \quad ; \quad \sum_{1}^{n} M_{iOY} = 0 \quad ; \sum_{1}^{n} M_{iOZ} = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

## Exemple d'application

Deux bobines de ruban sont fixées à un arbre supporté par deux paliers lisses à ses extrémités *A* et *D* (Fig. 1). Les rayons des bobines *B* et *C* sont de 30*mm* et 40*mm* respectivement. Sachant que $T_B$ = 80*N* et que le système tourne à une vitesse constante, calculez les réactions aux paliers *A* et *D*. On suppose que le poids du système est négligeable et que le palier *A* n'exerce aucune poussée axiale.

## Solution

Il faut dessiner le corps isolé avec toutes les forces extérieures (Fig. 3.7).

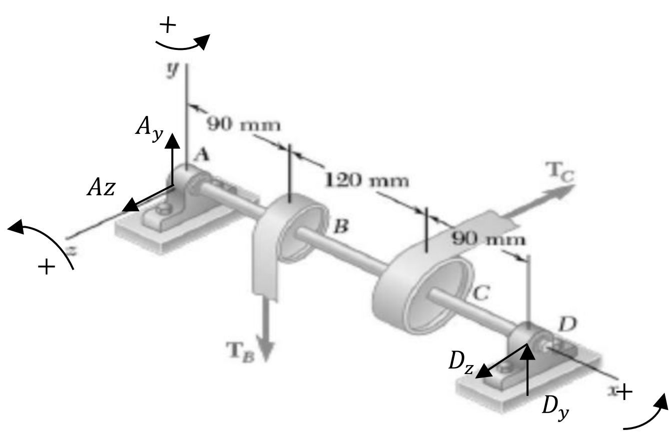



**Fig. 3.7 Exercice d'application.**

$$\begin{cases} \vec{A} + \vec{T}_B + \vec{T}_C + \vec{D} = \vec{0} \\ \vec{M}_A(\vec{A}) + \vec{M}_A(\vec{T}_B) + \vec{M}_A(\vec{T}_C) + \vec{M}_A(\vec{D}) = \vec{0} \end{cases}$$

| | $\vec{A}$ | $\vec{T}_B$ | $\vec{T}_C$ | $\vec{D}$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_{ix}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $F_{iy}$ | $A_y$ | $-80$ | $0$ | $D_Y$ |
| $F_{iz}$ | $Az$ | $0$ | $-T_C$ | $D_Z$ |
| $M_{iAx}$ | $0$ | $2400$ | $-40T_C$ | $0$ |
| $M_{iAy}$ | $0$ | $0$ | $210T_C$ | $-300D_z$ |
| $M_{iAz}$ | $0$ | $-7200$ | $0$ | $300D_y$ |

La résolution du système linéaire est faite par substitution. La condition de résolution est que le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations.

**Equation 6**

$$D_y = \frac{7200}{300} = 24N$$

**Equation 4**

$$T_C = \frac{2400}{40} = 60N$$

**Equation 5**

$$D_z = \frac{210T_C}{300} = 42N$$

$$D = \sqrt{\left(D_y\right)^2 + (D_z)^2} = \sqrt{(24)^2 + (42)^2} = 48N$$

**Equation 2**

$$A_y = 80 - D_y = 56N$$

**Equation 3**

$$A_z = T_C - D_z = 18N$$

$$A = \sqrt{\left(A_y\right)^2 + (A_z)^2} = \sqrt{(56)^2 + (18)^2} = 81N$$