

Corrigé de la fiche 1 : Notions d'analyse vectorielle

Exercice 1

Scalaire			Vecteur		
Grandeur	Symbole	Unité	Grandeur	Symbole	Unité
Masse	m	kg	Poids	\vec{W}	N
Longueur	L	m	Quantité de Mouvement	\vec{Q}_m	$kg.s$
Temps	t	s	Force	\vec{F}	N
Surface	S	m^2	Moment par rapport à un point	\vec{M}_O	$N.m$
Masse volumique	ρ	$kg.m^{-3}$	Vitesse linéaire	\vec{v}	$m.s^{-1}$
Travail	Tr	J	Accélération tangentielle	\vec{a}_t	$m.s^{-2}$
Puissance	Pu	W	Accélération normale	\vec{a}_n	$m.s^{-2}$
Energie cinétique	Ec	J	Vitesse angulaire	$\vec{\omega}$	$rad.s^{-1}$
Quantité de chaleur	Q	J			
Volume	V	m^3			

Exercice 2

$$1) \vec{R} = 2\vec{A} - \vec{B}$$

$$\vec{R} = (6 - 2)\vec{i} + (10 - 1)\vec{j} + (-4 - 4)\vec{k}$$

$$\vec{R} = 4\vec{i} + 9\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$R = \sqrt{4^2 + 9^2 + (-8)^2} = \sqrt{161}$$

$$2) \vec{u} = \frac{4\vec{i} + 9\vec{j} - 8\vec{k}}{\sqrt{161}}$$

Exercice 3

$$1) \vec{A} \cdot \vec{B} = (1 \times 2) + (2 \times (-3)) + (3 \times 4) = 8$$

$$2) A = \sqrt{1^2 + 2^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$$

$$B = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B} = \frac{8}{\sqrt{14 \times 29}} = 0.397$$

$$\theta = 66.61^\circ$$

$$3) \vec{A} = A\vec{u}$$

$$B_u = \vec{B} \cdot \vec{u} = B \cdot 1 \cdot \cos \theta = \sqrt{29} \times 0.397 = 2.14$$

Exercice 4

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = ((2) \times (3) - (3) \times (-4))\vec{i} - ((3) \times (3) - (1) \times (-4))\vec{j} + ((3) \times (3) - (1) \times (2))\vec{k}$$

$$\vec{B} \wedge \vec{C} = 18\vec{i} - 13\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (2 \times 18) + ((-3) \times (-13)) + (4 \times 7) = 103$$

Exercice 5

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (2 + 3 + 1)\vec{i} + ((-3) + 2 + 3)\vec{j} + (2 + (-4) + 3)\vec{k}$$

$$\vec{R} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$R = \sqrt{6^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{41}$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{6}{\sqrt{41}} = 0.937 \Rightarrow \alpha = 20.45^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{2}{\sqrt{41}} = 0.312 \Rightarrow \beta = 71.82^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{1}{\sqrt{41}} = 0.156 \Rightarrow \gamma = 81.03^\circ$$

Vérification

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 0.937^2 + 0.312^2 + 0.156^2 \approx 1$$

Exercice supplémentaire

1^{ère} méthode : le produit scalaire

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}; \quad \vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$A = \sqrt{24}; \quad B = \sqrt{6}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sqrt{24} \times \sqrt{6} \times \cos \theta = (2) \times (-1) + (-2) \times (1) + (-4) \times (2) = -12$$

$$\cos \theta = \frac{-12}{12} = -1; \text{ (donc les deux vecteurs sont parallèles).}$$

2^{eme} méthode : le produit vectoriel

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = ((-2) \times (2) - (1) \times (-4))\vec{i} - ((2) \times (2) - (-1) \times (-4))\vec{j} + ((2) \times (1) - (-1) \times (-2))\vec{k} = \vec{0} \quad (\text{donc les deux vecteurs sont parallèles}).$$