الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

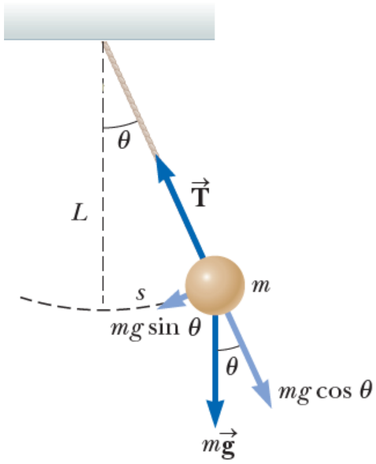
BOUTCHICHA Djilali

Pendules

Un pendule est un objet suspendu qui oscille autour d'une position d'équilibre. Le mouvement d'oscillation est produit par la force gravitationnelle qui engendre un moment de force de rappel. Nous allons analyser **le pendule simple**, où toute la masse est concentrée à une extrémité, et **le pendule composé**, où la masse est distribuée.

Le pendule simple

Un pendule simple est composé d'une masse compacte m au bout d'une corde, de longueur L et de masse négligeable. La corde est attachée à son autre extrémité. On suppose que la corde est une corde idéale, avec une masse négligeable et qui ne s'étire pas. Lors de l'oscillation, la masse décrit un arc de cercle, centré sur la verticale. La force résultante sur la masse durant les oscillations est égale à la composante tangentielle du poids. La force tangentielle agit comme une force de rappel dirigée vers la position d'équilibre.



L'application de la 2ème loi de Newton pour le pendule donne

$$ma(t) = -\,mg\sin\theta(t)$$

où m est la masse en kilogrammes,
$a(t)$ est l'accélération (à l'instant t) en mètres par seconde carrée.
g est l'accélération gravitationnelle ($9.8\ m/s^2$)
et $\theta(t)$ est la position angulaire (à linstant t) en radians.

Puisque la masse suit une trajectoire circulaire, l'accélération est définie par

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

où $\frac{d^2s}{dt^2}$ est la dérivée seconde de la position sur l'arc de cercle par rapport au temps en mètres par seconde carrée,
et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ est la dérivée seconde de l'angle du pendule par rapport au temps en radians par seconde carrée.

Avec la définition de l'accélération

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,mg\sin\theta(t)$$

Avec l'approximation ($\sin\theta \approx \theta$)pour de petits angles, on a

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0$$

Par comparaison avec l'équation différentielle du mouvement harmonique simple, on a

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\theta(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \ \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Alors, la position angulaire oscille autour de la verticale. La position angulaire en fonction du temps est donnée par

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

où θ_0 est le déplacement angulaire maximal en radians.

Finalement, on a

$$\begin{cases} f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L}} \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} \end{cases}$$

BOUTCHICHA Djilali

7. Un pendule simple oscille avec une amplitude de 3° et une période de 1 s. La masse est de 350 g.

a) Quelle est la pulsation du pendule ?
b) Quelle est la longueur du pendule ?
c) À quelle vitesse la masse passe-t-elle par la position d'équilibre ?

a) La pulsation du pendule

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi \times 1 = 2\pi \; rd/s$$

b) La longueur du pendule

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$L = \frac{Tg}{4\pi^2} = \frac{1 \times 9.8}{4\pi^2} = 0.2482 \; m$$

c) La vitesse à quelle la masse passe par la position d'équilibre

$$\theta_0 = 3^0 \Longrightarrow \theta_0 = \frac{3 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{60} \; rd.$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\omega\theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta}_{max} = \omega\theta_0$$

$$\dot{\theta}_{max} = 2\pi\frac{\pi}{60} = \frac{\pi^2}{30}$$

$$s = L\theta$$

$$\dot{s} = L\dot{\theta}$$

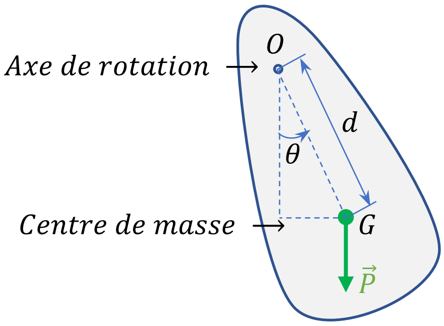
$$\dot{s}_{max} = L\dot{\theta}_{max} = v_{max}$$

$$v_{max} = \left(\frac{1 \times 9.8}{4\pi^2}\right)\left(\frac{\pi^2}{30}\right) = 0.08167\frac{m}{s} = 8.167 \; cm/s.$$

Pendule composé

Un pendule composé est formé par un corps rigide oscillant autour d'un axe fixe.

L'application de la 2e loi de Newton « en rotation » pour un pendule composé donne



$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,mgd\sin\theta(t)$$

Avec l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ pour les petits angles, on a

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,mgd \times \theta(t) \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,\frac{mgd}{I} \times \theta(t)$$

Par comparaison avec l'équation différentielle du mouvement harmonique simple, on a

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{mgd}{I}\theta(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

Alors, la position angulaire oscille autour de la verticale. La position angulaire en fonction du temps est donnée par

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \varphi)$$

Finalement, on a

$$\begin{cases} f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{mgd}{I}} \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}} \end{cases}$$

8. Une tige rigide homogène de 30 cm et 150 g oscille autour d'un axe de rotation passant par l'une de ses extrémités. La vitesse angulaire de la tige en passant par la position d'équilibre est de 0,35 rd/s.

a) Quelle est le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation ?
b) Quelle est la pulsation du pendule ?
c) Quelle est l'amplitude angulaire des oscillations ?

a) Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation

$$I_0 = I_G + m\overline{OG}^2 \qquad \text{avec} \qquad I_G = \frac{1}{12}ml^2$$

$$I_0 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

$$I_0 = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}0.150 \times 0.30^2 = 0.0045\ kg.m^2.$$

b) La pulsation du pendule

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_o}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{0.150 \times 9.8 \times 0.15}{0.0045}} = 7\ rd/s$$

c) L'amplitude angulaire des oscillations

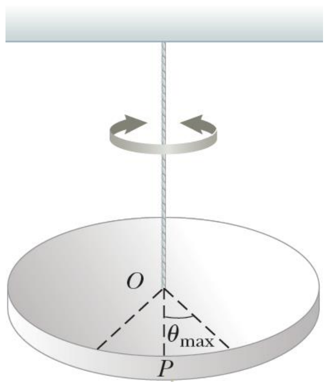
$$\dot{\theta}_{max} = \omega\theta_{max}$$

$$\theta_0 = \frac{\dot{\theta}_{max}}{\omega} = \frac{0.35}{7} = 0.05\ rd$$

الجمهوريـــــــة الجزائريـــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــم العـــــالي والبحـــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA Djilali

Pendule de torsion



La Figure montre un objet rigide tel qu'un disque suspendu par un fil attaché en haut à un support fixe. Lorsque l'objet est tordu d'un certain angle u, le fil torsadé exerce sur l'objet un couple de rappel proportionnel à la position angulaire. C'est,

$$\tau = -\kappa\theta$$

où κ (lettre grecque kappa) est appelée la constante de torsion du fil de support et est un analogue de rotation à la constante de force k pour un ressort. La valeur de κ peut être obtenue en appliquant un couple connu pour tordre le fil d'un angle θ mesurable.

En appliquant la deuxième loi de Newton pour le mouvement de rotation, nous constatons que l'application de la 2ème loi de Newton donne

$$\sum \tau = I\alpha \;\Rightarrow\; -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta(t)$$

Par comparaison avec l'équation différentielle du mouvement harmonique simple,

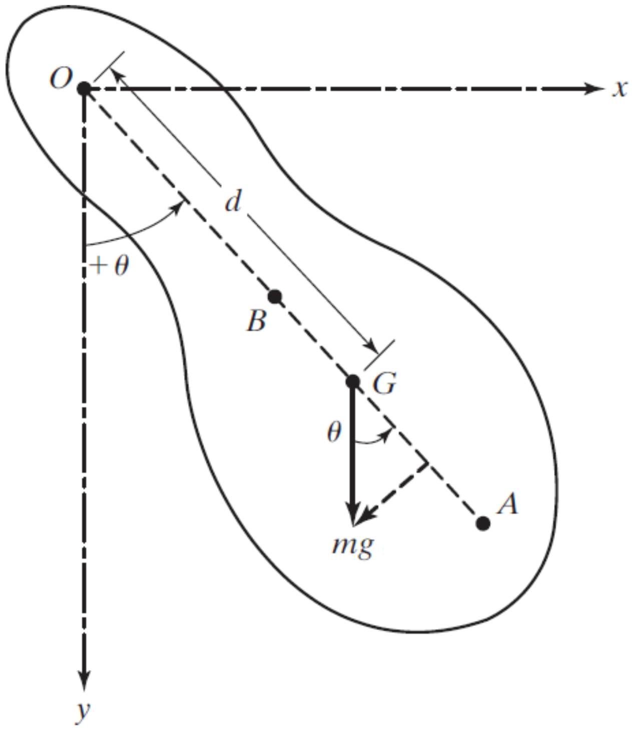
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{\kappa}{I}\theta(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{\kappa}{I}} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{\kappa}} \end{cases}$$

Encore une fois, ce résultat est l'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique simple.

Ce système s'appelle un pendule de torsion. Il n'y a pas de restriction de petit angle dans cette situation tant que la limite élastique du fil n'est pas dépassée.

BOUTCHICHA
Djilali

Pendule Physique



Un pendule composé est formé par un corps rigide oscillant autour d'un axe fixe.
L'application de la 2ème loi de Newton « en rotation » pour un pendule composé donne

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m\ g\ d\ \sin\theta(t)$$

où	I	est le moment d'inertie en kilogrammes mètres carrés,
	$\frac{d^2\theta}{dt^2}$	est la dérivée seconde de l'angle du pendule par rapport au temps en radians par seconde carrée,
	m	est la masse en kilogrammes,
	g	est l'accélération gravitationnelle ($9{,}8\ m/s^2$),
	d	est la distance de l'axe de rotation au centre de masse en mètres
et	$\theta(t)$	est la position angulaire (à l'instant t) en radians.

Avec l'approximation $\boldsymbol{\sin\theta \approx \theta}$ pour les petits angles, on a

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m\ g\ d\ \theta(t) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta(t) = 0$$

Par comparaison avec l'équation différentielle du mouvement harmonique simple, on a

$$\omega_n = \sqrt{\frac{m\ g\ d}{I}}$$

Avec ω_n est la pulsation propre en radians.
L'angle du corps rigide en fonction du temps est donné par

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_n t + \phi)$$

avec θ_0 est le déplacement angulaire maximal en radians,
et ϕ est la constante de phase en radians.

Finalement on a

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m\,g\,d}{I}}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m\,g\,d}}$$

Etude d'un pendule constitué d'une barre

Le pendule est constitué d'une barre de longueur l et de masse m qui peut osciller librement sous l'effet de son poids autour d'un axe O. La distance entre le centre de masse du pendule et l'axe de rotation est $l/2$.

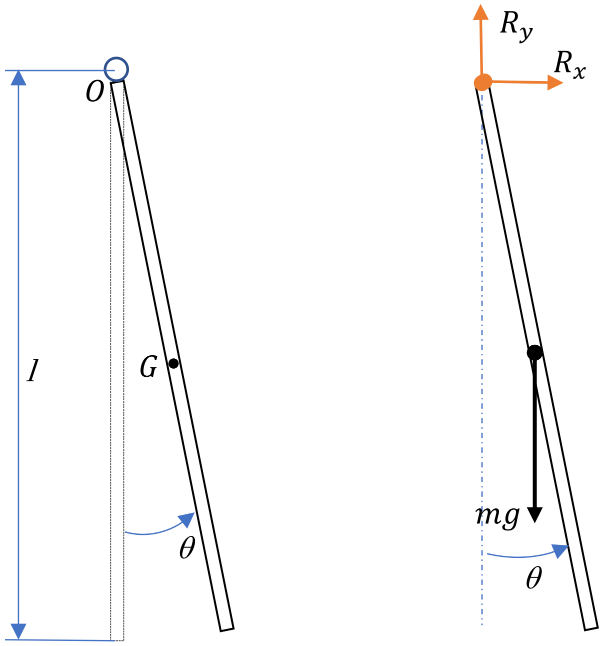


Diagramme du corps libre du pendule physique

BOUTCHICHA
Djilali

L'équation du mouvement

On applique la 2ème loi de Newton des moments autour du point d'articulation O.

$$\sum \mathcal{M}_{/O} = J_0 \ \alpha$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{f_r/O}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{f_r}$$
$$\overrightarrow{(\mathcal{M}_{P/O})} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{mg}$$
$$(\mathcal{M}_{P/O}) = -\frac{l}{2} mg. \sin\theta$$

(Les moments des forces de réactions R_x et R_y autour de O sont nuls.)

$$J_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \frac{l}{2} \sin\theta$$

Pour de faibles amplitudes de vibration, on utilise les approximations :
$\sin\theta \approx \theta$, ce qui donne :

$$J_O \ddot{\theta} + \frac{mgl}{2}\theta = 0$$
$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{2J_O}}$$

avec $J_O = J_G + m(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$

La fréquence naturelle est

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{l}}$$

La période est

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{l}{g}}$$