الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

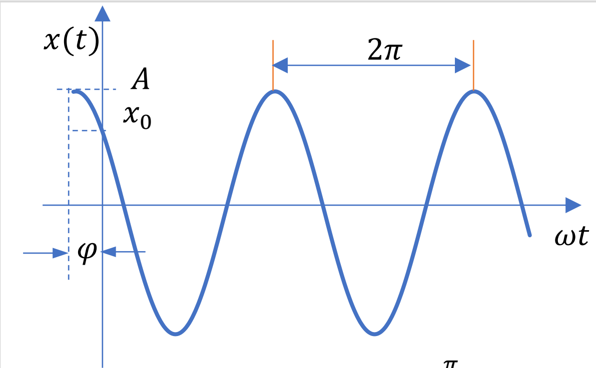
BOUTCHICHA Djilali

Mouvement harmonique simple

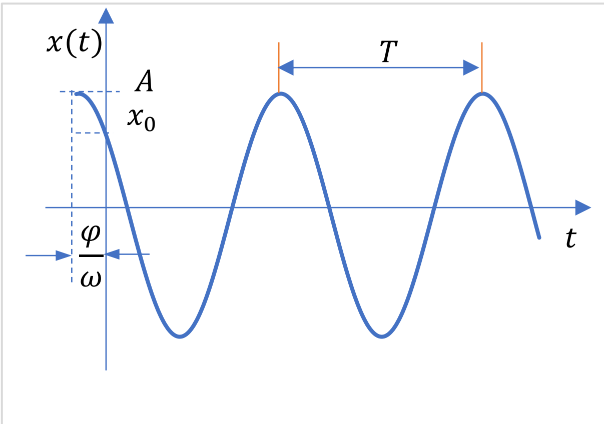
Le mouvement harmonique simple sert à décrire les oscillations d'un corps en mouvement. Dans les cas simples, le mouvement oscillant est décrit par une fonction sinusoïdale ; soit

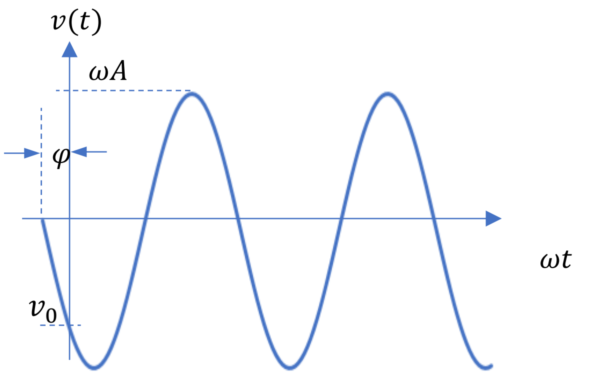
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

où $x(t)$ et la position (à la position t) en mètre,
A est l'amplitude de l'oscillation en mètres,
ω est la pulsation en radians par seconde,
t est le temps en secondes
et φ est la constante de phase en radians.

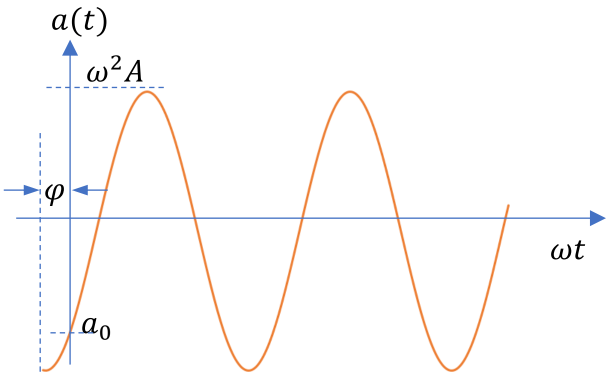


Note : $x_0 = A\cos\varphi\,;\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2};\ x_0 > 0$





Note : $v_0 = -\omega A\sin\varphi\,;\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2};\ v_0 < 0$



Note : $a_0 = -\omega^2 A\cos\varphi\,;\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2};\ a_0 < 0$

La pulsation dépend de la fréquence ou de la période des oscillations ; soit

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

où f est la fréquence en hertz
et T est la période en secondes.

La période est la durée d'un cycle et la fréquence est le nombre de cycles par seconde. Ne pas confondre la fréquence avec la pulsation.

La position en fonction du temps étant connue, les dérivées par rapport au temps permettent de calculer la vitesse et l'accélération d'un corps ayant un mouvement oscillant. Par définition de la vitesse, on a

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \end{cases} \implies v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$

où $v(t)$ est la vitesse (à l'instant t) en mètres par seconde
et $\frac{dx}{dt}$ est la dérivée de la position par rapport au temps en mètres par seconde.

De même, par définition de l'accélération, on a

$$\begin{cases} v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \\ a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) \end{cases} \implies a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

où $a(t)$ est l'accélération (à l'instant t) en mètres par seconde carrée,
$\frac{dv}{dt}$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps en mètres par seconde carrée
et $\frac{d^2x}{dt^2}$ est la dérivée seconde de la position par rapport au tempsen mètres par seconde carrée.

Des relations utiles permettent de relier l'amplitude et la constante de phase à la position et vitesse initiales. Ces relations utiles sont

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A \sin\varphi \end{cases} \implies \begin{cases} A = \sqrt{\left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(-\dfrac{v_0}{\omega x_0}\right) \end{cases}$$

où x_0 est la position initiale (à l'instant t =0) en mètres,
et v_0 est la vitesse initiale (à l'instant t =0) en mètres par seconde.

L'accélération et la position sont décrites par des fonctions sinusoïdales déphasées de 180°. D'après les résultats précédents, on a

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \quad \Longrightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \\ \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \end{cases}$$

Cette dernière équation caractérise le mouvement harmonique simple. L'expression de la position en fonction du temps découle de cette équation.

1. Un corps possède un mouvement oscillant avec une amplitude de $4\ cm$ et une pulsation de $\pi/3\ rd/s$. La constante de phase vaut $\pi/6\ rd$.

   a) Quelle est la position initiale (à $t = 0$) ?

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$x(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$x_0 = x(0) = 4\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\times 0 + \tfrac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} = 3.4641\ \ cm$$

   b) Quelle est la position à $t = 1\ s$?

$$x_1 = x(1) = 4\cos\left(\tfrac{\pi}{3}1 + \tfrac{\pi}{6}\right) = 0$$

   c) Quelle est la fréquence de l'oscillation ?

$$\omega = 2\pi f \ \Rightarrow\ f = \tfrac{\omega}{2\pi} = \tfrac{\pi/3}{2\pi} = \tfrac{1}{6}\ Hz$$

   d) Quelle est la période de l'oscillation ?

$$T = \tfrac{1}{f} = \tfrac{1}{1/6} = 6\ s$$

2. La position initiale d'un corps en oscillation est de $3\,cm$. La fréquence de l'oscillation est de $0,2\ Hz$. L'amplitude du mouvement oscillant est de $5\,cm$. La vitesse initiale est négative.

   a) Quelle est la constante de phase des oscillations ?

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \varphi)$$
$$x(t) = 5\cos(2\pi \times 0.2t + \varphi) = 5\cos(0.4\pi t + \varphi)$$
$$x(0) = 3 = 5\cos(0.4\pi \times 0 + \varphi) = 5\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \tfrac{3}{5}\ ,$$
$$\varphi = \arccos\tfrac{3}{5} = 0.92730\ rd \quad \text{soit} \quad \varphi = 0.92730\tfrac{180}{\pi} = 53.13^o$$

   b) Quelle est la pulsation de l'oscillation ?

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 0.2 = 0.4\pi = 1.2566\ \ rd/s$$

   c) Quelle est la grandeur de la vitesse maximale ?

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$$
$$v_{\max} = \omega A = 0.4\pi \times 5 = 2.0\pi = 6.2832\ cm/s$$

d) Quelle est la grandeur de l'accélération maximale ?

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$
$$a_{\max} = \omega^2 A = (0.4\pi)^2 \times 5 = 0.8\pi^2\ cm/s^2$$

3. La position initiale d'un corps en oscillation est de $4\ cm$ et sa vitesse initiale est de $15\ cm/s$. La pulsation est de $5\ rd/s$.

a) Quelle est l'amplitude de l'oscillation ?

$$A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(4)^2 + \left(\frac{15}{5}\right)^2} = 5\ cm$$

b) Quelle est la constante de phase des oscillations ?

$$\varphi = \arctan\left(-\tfrac{v_0}{\omega x_0}\right) = \arctan\left(-\tfrac{15}{5\times 4}\right) = -0.6435\ rd$$
$$\varphi = -0.6435\tfrac{180}{\pi} = -36.87^o$$