الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA Djilali

Système masse-ressort

Une masse fixée à l'extrémité libre d'un ressort hélicoïdal constitue un système masse-ressort. Pour de petits allongements, la force de rappel exercée par le ressort sur la masse est

$$f_r = -\, k\, x$$

Où f_r est la force de rappel exercée par le ressort en newtons,
k est la constante de rappel en newtons par mètre
et x est l'allongement en mètres.

Si le ressort est en position horizontale, la force résultante exercée sur la masse est la force de rappel du ressort. L'application de la 2ème loi de Newton donne

$$ma(t) = -\, k\, x(t)$$

où m est la masse en kilogrammes,
$a(t)$ est l'accélération (à l'instant t) en mètres par seconde carrée.

Avec la définition de l'accélération, la 2e loi de Newton conduit à une équation différentielle semblable à celle pour le mouvement harmonique simple ; soit

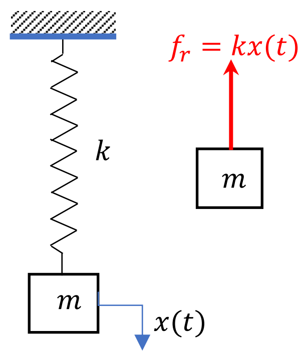
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Par comparaison avec l'équation différentielle du mouvement harmonique simple, on a

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x(t) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Alors, on a

$$\begin{cases} f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \end{cases}$$



4. **Une masse de 500 g oscille horizontalement à l'extrémité libre d'un ressort ayant une constante de rappel de 4,5 N/m. La masse est initialement au repos à une position correspondant à un allongement de 8 cm par rapport à la position d'équilibre.**

a) Quelle est la fréquence des oscillations du système masse-ressort ?

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4.5}{0.5}} = \frac{3}{2\pi} \quad Hz$$

b) Quelle est la constante de phase des oscillations (sinusoïdales) ?

A $t = 0$; la masse est au repos ($v_0 = 0$) et l'allongement est de 8 cm, ($x_0 = 0.08\ m$).

$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$

$v_0 = v(0) = 0 \Longrightarrow -\omega A \sin(0 + \varphi) = 0$

$\sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$ où π

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$x_0 = x(0) > 0 \ \Longrightarrow A\cos(\varphi) > 0 \ \Longrightarrow \ \cos(\varphi) > 0 \ \Longrightarrow \varphi = 0\ rd$

c) Quel est le temps nécessaire à partir du point de départ pour que la masse parcours une distance de 4 cm ?

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$x_0 = 8\ cm \ \Longrightarrow x(0) = A\cos(0) = 8\ cm \Longrightarrow A = 0.08\ m$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4.5}{0.5}} = 3\ rd$$

$x(t) = 8\cos(3t)$

$$8\cos(3t) = 4 \cos(3t) = \frac{1}{2}$$

$3t = \frac{\pi}{3} + n\pi$ avec $n = 0,1,2, \ldots \Longrightarrow t_1 = \frac{\pi}{9}\ s.$

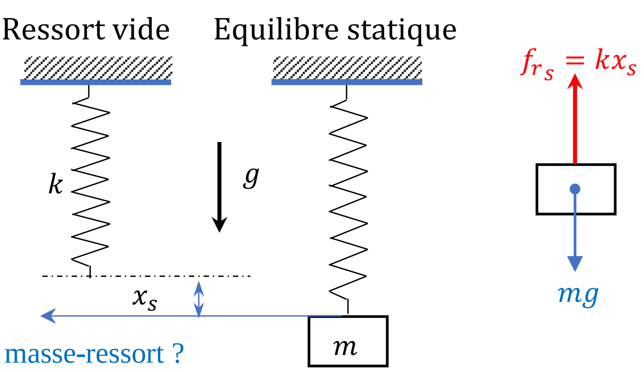
5. Une masse de 100 g oscille verticalement à l'extrémité libre d'un ressort. La position d'équilibre avec la masse suspendue correspond à un allongement de 2 cm par rapport à la position de l'extrémité du ressort sans la masse.

a) Quelle est la grandeur de la force exercée par le ressort à la position d'équilibre ?

La force exercée par le ressort égalise la force de pesanteur (équilibre statique)

$f_{r_s} = mg$

$f_{r_s} = 0.1 \times 9.8 = 0.98\ N$



b) Quelle est la constante de rappel du ressort ?

$f_{r_s} = \ k\ x_s$

$k \ = f_{r_s} /\ x_s$

$$k \ = \frac{0.98}{0.02} = 49\ N/m$$

c) Quelle est la période des oscillations du système masse-ressort ?

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{0.1}{49}} = 0.284\ s$$