



TD1

Représentation mathématique de mouvement harmonique simple

Exercice 1.

Dans un moteur, un piston oscille avec un mouvement harmonique simple de sorte que sa position varie en fonction de l'expression

$$x = (5.00 \text{ cm}) \cos(2t + \pi/6),$$

où x est en centimètres et t est en secondes. A $t = 0$, trouver (a) la position du piston, (b) sa vitesse, et (c) son accélération. (d) Trouver la période et l'amplitude du mouvement.

- a) $x = (5.00 \text{ cm}) \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ à $t = 0$, $x = (5.00 \text{ cm}) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4.33 \text{ cm}$
b) $v = \frac{dx}{dt} = -(10.0 \text{ cm}) \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ à $t = 0$, $v = -5.00 \text{ cm/s}$
c) $a = \frac{dv}{dt} = -(20.0 \text{ cm}) \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ à $t = 0$, $a = -17.3 \text{ cm/s}^2$.
d) $A = 5.00 \text{ cm}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Exercice 2.

La position d'une particule est donnée par l'expression

$$x = (4.00 \text{ m}) \cos(3.00\pi t + \pi),$$

où x est en mètres et t est en secondes. Déterminer (a) la fréquence et la période du mouvement, (b) l'amplitude du mouvement, (c) la constante de phase, et (d) la position de la particule à $t = 0.250 \text{ s}$.

- $x = (4.00 \text{ m}) \cos(3\pi t + \pi)$ en comparant avec $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ on trouve
a) $\omega = 2\pi f = 3\pi$ ou bien $f = 1.50 \text{ Hz}$ et $T = \frac{1}{f} = 0.667 \text{ s}$
b) $A = 4.00 \text{ m}$
c) $\varphi = \pi \text{ rad}$
d) $x(t = 0.250 \text{ s}) = (4.00 \text{ m}) \cos(3\pi \times 0.250 + \pi) = 2.83 \text{ m}$.

Exercice 3.

Une particule se déplaçant le long de l'axe x dans un mouvement harmonique simple à partir de sa position d'équilibre, à l'origine, à $t = 0$ et se déplace vers la droite. L'amplitude de son mouvement est 2.00 cm , et la fréquence est de 1.50 Hz . (a) Montrer que la position de la particule est donnée par

$$x = (2.00 \text{ cm}) \sin 3.00\pi t$$

Déterminer (b) la vitesse maximale et le premier temps ($t > 0$) à laquelle la particule possède cette vitesse, (c) l'accélération maximale et le premier temps ($t > 0$) à laquelle la particule possède cette accélération, et (d) la distance totale parcourue entre $t = 0$ et $t = 1.00 \text{ s}$.



a) Equation de la position

$A t = 0, x = 0$ et v est positive (vers la droite).

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(0) = A \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi = +\frac{\pi}{2} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$v(t) = -A \sin(\omega t + \varphi)$$

Choix de la phase qui correspond à la vitesse positive

$$v(0) = -A \sin(\varphi) > 0 \Rightarrow \sin(\varphi) < 0 \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} = +1 \\ \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A \left[\cos \omega t \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin \omega t \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = A \sin \omega t$$

donc

$$x(t) = A \sin \omega t \text{ et } v = A \cos \omega t$$

Comme $A = 2.00 \text{ cm}$ et $f = 1.50 \text{ Hz}$; $\omega = 2\pi f = 3\pi \text{ rad/s}$;

$$x(t) = (2.00 \text{ cm}) \sin 3.00\pi t$$

b) La vitesse maximale

$$v_{\max} = v_0 = \omega A = 3.00\pi \times 2.00 = 6.00\pi \text{ cm/s} = 18.8 \text{ cm/s}$$

$$v = 6.00\pi \cos 3.00\pi t$$

La particule possède cette vitesse à :

$$t = 0 \text{ et en suite à } t = \frac{T}{2} = \frac{1}{3} \text{ s}$$

c) L'accélération maximale

$$a_{\max} = \omega^2 A = (3.00\pi)^2 \times 2.00 = 18.0\pi^2 \text{ cm/s}^2 = 178 \text{ cm/s}^2$$

Cette valeur positive d'accélération se produit pour la première fois à $t = \frac{3T}{4} = 0.50 \text{ s}$

Puisque $T = \frac{2}{3} \text{ s}$ et $A = 2.00 \text{ cm}$, la particule parcourra 8.00 cm en ce temps.

Par conséquent, en $1 \text{ s} (= \frac{3}{2}T)$, la particule parcourra $8.00 \text{ cm} + 4.00 \text{ cm}$



Exercice 4.

La position, la vitesse et l'accélération initiales d'un objet se déplaçant dans un mouvement harmonique simple sont x_0 , v_0 , et a_0 ; la fréquence angulaire d'oscillation est '.

(a) Montrer que la position et la vitesse de l'objet à n'importe quels instants peuvent être écrites comme

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t$$

$$v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$$

(b) Si l'amplitude du mouvement est A, montrer que

$$v^2 - ax = v_0^2 - a_0 x_0 = \omega^2 A^2$$

La solution proposée est $x(t) = x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t$

Implique la vitesse $v(t) = -\omega x_0 \sin \omega t + v_0 \cos \omega t$

et l'accélération $a(t) = -\omega^2 x_0 \cos \omega t - \omega^2 \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t$

$$a(t) = -\omega^2 \left(x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t \right) = -\omega^2 x(t)$$

a) L'accélération étant une position fois une constante négative signifie que nous avons un mouvement harmonique simple, et sa fréquence angulaire est ω . À $t = 0$, les équations se réduisent à $x = x_0$ et $v = v_0$ afin de satisfaire toutes les exigences.

b) $v^2 - ax = (-\omega x_0 \sin \omega t + v_0 \cos \omega t)^2 - (-\omega^2 x_0 \cos \omega t - \omega v_0 \sin \omega t)(x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega}\right) \sin \omega t)$

$$v^2 - ax = \omega^2 x_0^2 \sin^2 \omega t - 2\omega x_0 v_0 \sin \omega t \cos \omega t + x_0^2 \cos^2 \omega t + \omega^2 x_0^2 \cos^2 \omega t$$

$$+ \omega x_0 v_0 \cos \omega t \sin \omega t + \omega x_0 v_0 \sin \omega t \cos \omega t + v_0^2 \sin^2 \omega t = x_0^2 \omega^2 + v_0^2$$

Cette expression est donc constante dans le temps. D'une part, il doit conserver sa valeur d'origine $v_0^2 - a_0 x_0$. Par contre, si on l'évalue à un tournant où $v = 0$ et $x = A$, c'est $A^2 \omega^2 + 0^2 = A^2 \omega^2$. C'est donc prouvé.

Exercice 5.

Un piston dans un moteur à essence est en mouvement harmonique simple. Si les extrêmes de sa position par rapport à son centre sont et $\pm 5.00 \text{ cm}$, trouver la vitesse et l'accélération maximales du piston lorsque le moteur tourne à la vitesse de 3 600 tr / min.

$$x(t) = A \cos \omega t \quad A = 0.05 \text{ m} \quad v = -\omega A \sin \omega t \quad a = -\omega^2 A \cos \omega t$$

Si $f = 3600 \text{ tr/min} = 60 \text{ Hz}$, Ainsi $\omega = 120\pi \text{ s}^{-1}$

$$v_{\max} = \omega A = 120\pi \times 0.05 = 18.8 \text{ m/s}; a_{\max} = \omega^2 A = (120\pi)^2 \times 0.05 = 7.11 \text{ km/s}^2$$