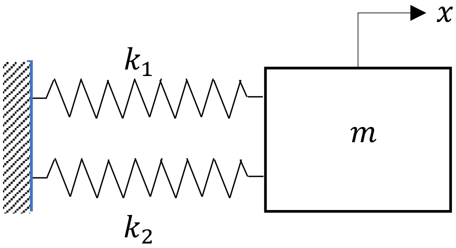
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
University of Science and Technology of Oran - Mohamed BOUDIAF
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering

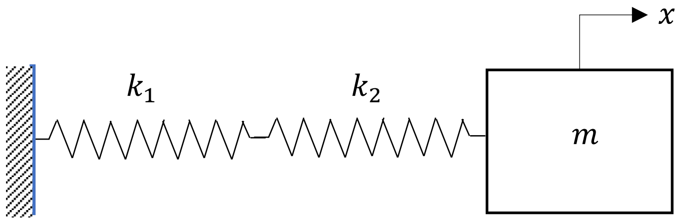
Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

TD2. Systèmes avec mouvement harmonique

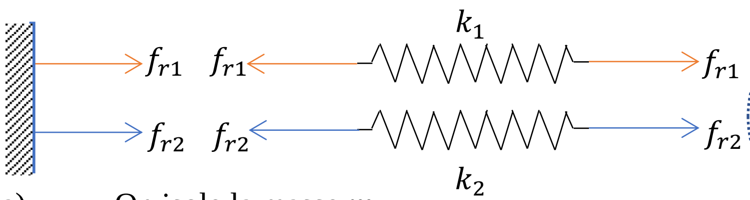
Exercice 1

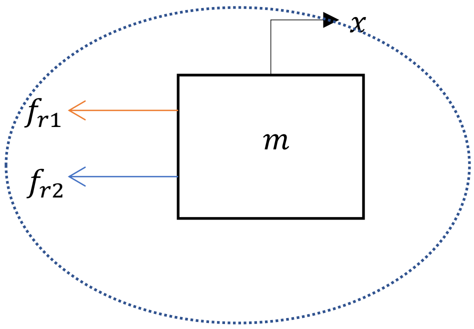
Déterminer les pulsations propres (naturelles) des systèmes illustrés ci-dessous.





Les deux ressorts s'allongent du même déplacement x.





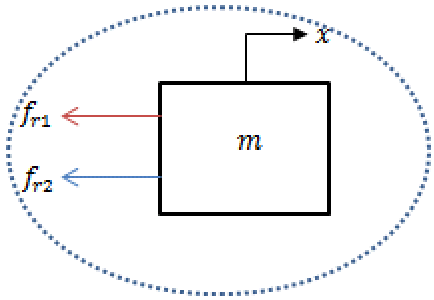
a) On isole la masse m

b) On applique la loi de la dynamique

$$\sum F_x = ma_x$$

$$-f_{r1} - f_{r1} = ma_x$$

c) On relie les forces aux variables



$$f_{r1} = k_1 \mathrm{x}$$

$$f_{r2} = k_2 x$$

$$-k_1 x - k_2 x = m\ddot{x}$$

d) On réarrange

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{m} x = 0$$

e) La pulsation propre est

$\omega_n = \sqrt{\frac{(k_1+k_2)}{m}}$; Le coefficient de raideur équivalent $k_{eq} = (k_1 + k_2)$

Le déplacement de la masse m est égal à la somme des allongements des deux ressorts

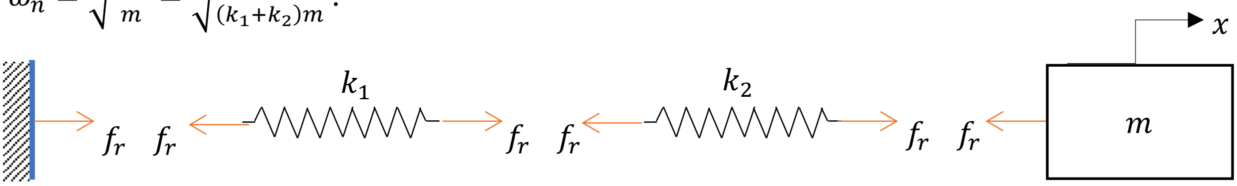
$$x = x_1 + x_2$$

La tension dans les ressorts est identique

$$f_r = k_1 x_1 = k_2 x_2 = k_{eq} x \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{f_r}{k_1} \text{ ; } x_2 = \frac{f_r}{k_2} \text{ ; } x = \frac{f_r}{k_{eq}}$$

$\frac{f_r}{k_{eq}} = \frac{f_r}{k_1} + \frac{f_r}{k_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \Rightarrow$ Le coefficient de raideur équivalent $k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)m}}.$$

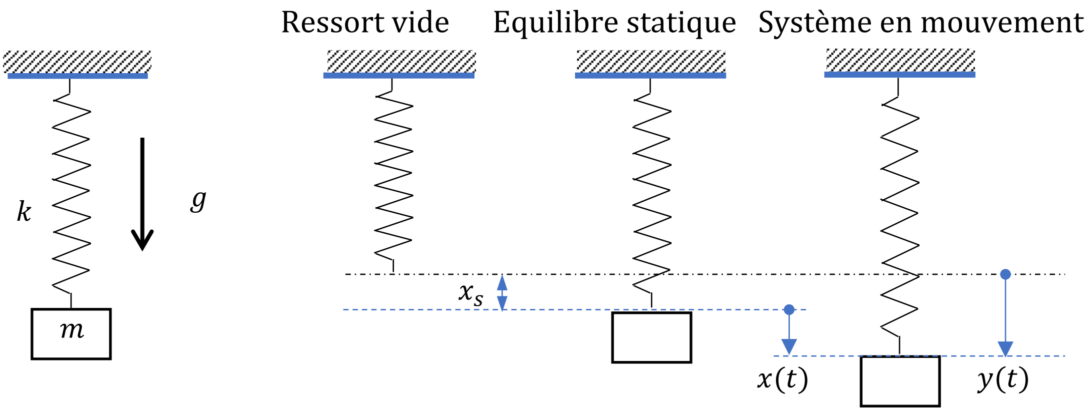


الجمهوريـــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العـــــــــالي والبحــــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
University of Science and Technology of Oran - Mohamed BOUDIAF
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering

Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

Exercice 2.

Déterminer l'équation de mouvement du système en fonction de (y : l'allongement total) et de (x : l'allongement relatif à la position d'équilibre statique). Discuter de l'effet de la gravité sur la fréquence naturelle.



Equilibre statique

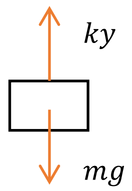
$+\downarrow \sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad -kx_s + mg = 0$

$kx_s = mg \quad \Longrightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{x_s}$

Equilibre Dynamique

$+\downarrow \sum F = ma \quad \Rightarrow \quad -ky + mg = ma$

$m\ddot{y} + ky = mg$



Changement de variable

$y(t) = x(t) + x_s$

$\dot{y}(t) = \dot{x}(t)$

$\ddot{y}(t) = \ddot{x}(t)$

On remplace dans l'équation de mouvement

$m\ddot{x} + kx + kx_s = mg$

$m\ddot{x} + kx = 0$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

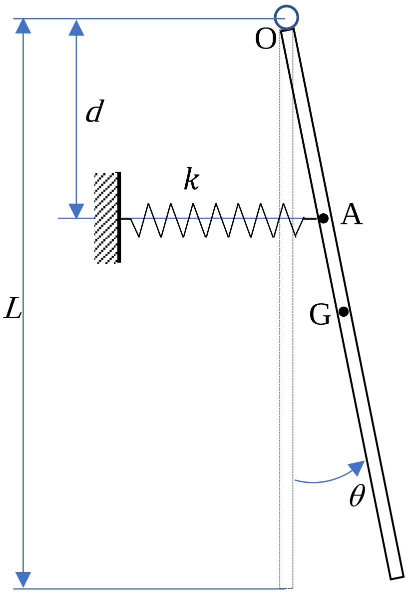
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

الجمهوريـــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العــــــــالي والبحــــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
University of Science and Technology of Oran - Mohamed BOUDIAF
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering

Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

Exercice 3.

Déterminer la fréquence naturelle du pendule composé d'une tige de masse m et de longueur L, retenu au point A par un ressort de raideur k et cela pour de faibles angles d'oscillation.



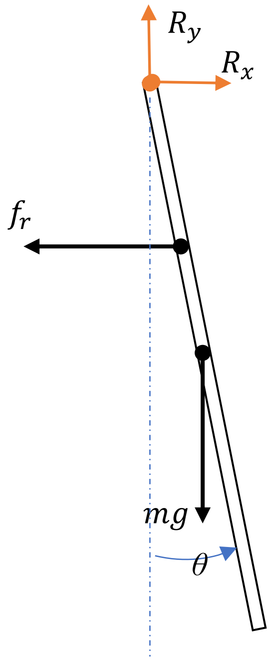


Diagramme du corps libre du pendule

On applique la 2eme loi de Newton des moments autour du point d'articulation O.

$\sum \mathcal{M}_{/O} = I_0\ \alpha$ avec $I_O = I_G + m(\frac{L}{2})^2 = \frac{1}{12}\ mL^2 + \frac{1}{4} mL^2 = \frac{1}{3}\ mL^2$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{f_r/O}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{f_r}$$

$$(\mathcal{M}_{f_r/O}) = -d\ .kx\ .\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -d.kx.\cos\theta$$

$$\overrightarrow{(\mathcal{M}_{P/O})} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{mg}$$

$$(\mathcal{M}_{P/O}) = -\frac{l}{2} mg.\sin\theta$$

(Les moments des forces de réactions R_X et R_Y autour de O sont nuls.)

$$I_O\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = -dkx\cos\theta - mg\frac{l}{2}\ \sin\theta$$

Pour de faibles amplitudes de vibration, on utilise les approximations : $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ et $x \approx s = d \times \theta$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{3} m\ L^2\ \ddot{\theta} + \left(kd^2 + \frac{mgL}{2}\right)\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\left(kd^2 + \frac{mgL}{2}\right)}{\frac{1}{3} m\ l^2}}$$

La fréquence naturelle est

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\ \frac{2kd^2 + mgL}{m\ l^2}}$$

الجمهوريـــــــــــــــــة الجزائريــــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العــــــــالي والبحــــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
University of Science and Technology of Oran - Mohamed BOUDIAF
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering

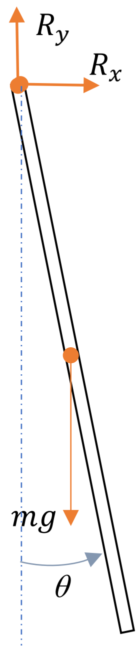
Enseignant
Djilali
BOUTCHICHA

Exercice 4.

Une tige rigide homogène de longueur $L = 30\ cm$ et de masse $m = 150\ g$ oscille autour d'un axe de rotation passant par l'une de ses extrémités. La vitesse angulaire de la tige en passant par la position d'équilibre est de 0,35 rd/s.

Rappel : *Le centre de gravité d'une tige homogène est en son centre géométrique. Le moment d'inertie d'une tige par rapport à un axe de rotation passant par son centre de gravité est* $I_G = \frac{1}{12} mL^2$.

a) Quelle est le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation ?
b) Quelle est la pulsation du pendule ?
c) Quelle est l'amplitude angulaire des oscillations ?



a) Moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation

$$I_O = I_G + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_O = \frac{1}{12}\, mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_O = \frac{1}{3}\, mL^2$$

Application numérique $I_O = \frac{1}{3}\, 0{,}150(0{,}30)^2 = 0{,}0045\ \mathrm{kg\ m^2}$

b) La pulsation propre du pendule

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\vec{p}}/_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{p}}/_O = OG \times mg \sin(\overrightarrow{OG}, \vec{g})$$

$$\mathcal{M}_{\vec{p}}/_O = -\frac{L}{2} mg \sin\theta$$

$$\sum \mathcal{M}/_O = I_O \alpha$$

$$-\frac{L}{2} mg \sin\theta = \frac{1}{3}\, mL^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{1}{3}\, mL^2 \ddot{\theta} + \frac{L}{2} mg\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3\,g}{2\,L}\theta = 0$$

$\omega_n = \sqrt{\frac{3\,g}{2\,L}}$; Application numérique $\omega_n = \sqrt{\frac{3*9{,}8}{2*0{,}30}} = 7$ rd/s

c) L'amplitude maximale des oscillations

La vitesse de passage par la position d'équilibre est la vitesse maximale

$$\dot{\theta}_{max} = 0{,}35\ rad/s$$

L'expression de vitesse maximale

$$\dot{\theta}_{max} = \theta_{max}\omega_n$$

$$\theta_{max} = \dot{\theta}_{max}/\omega_n$$

Application numérique ; $\theta_{max} = \frac{0{,}35}{7} = 0{,}05\ rad$