

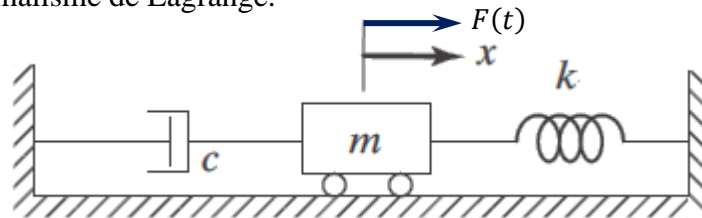


TD4 – OV – Application de la 2^{ème} loi de Newton et du Formalisme de Lagrange

Exercice 1

Déterminer l'équation de mouvement du système masse ressort amortisseur suivant :

- en appliquant la 2^{ème} loi Newton ;
- en utilisant le Formalisme de Lagrange.



Solution :

Isoler la masse et remplacer les liaisons par leurs effets.

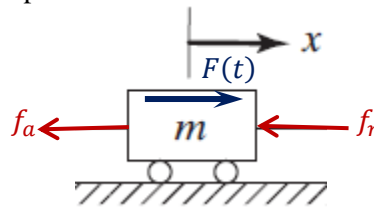


Diagramme du corps isolé

Appliquer la seconde loi de Newton

$$ma_x = \sum_x f_x$$

$$ma_x = -f_a - f_r + F(t)$$

La force d'amortissement

$$f_a = c\dot{x}$$

La force de rappel

$$f_r = kx$$

La force extérieure

$$F(t)$$

Remplacer

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx + F(t)$$

Réarranger

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

On obtient l'équation de mouvement qui est une équation différentielle de deuxième ordre à coefficients constants



Appliquer le formalisme de Lagrange

L'Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial W}{\partial q} = F_q$$

Dans ce système la coordonnée généralisée $q = x$ et la vitesse généralisée $\dot{q} = \dot{x}$.

L'Energie cinétique T

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

L'Energie potentielle V

$$V = \frac{1}{2} k x^2$$

La Fonction de dissipation D

$$D = \frac{1}{2} c \dot{x}^2$$

Le travail des forces extérieures

$$W = F(t) \cdot x$$

La force généralisée

$$F_q = \frac{\partial W}{\partial x} = F(t)$$

L'Equation de Lagrange devient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F_q$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c \dot{x}$$

$$F_q = \frac{\partial W}{\partial x} = F(t)$$

On obtient l'équation de mouvement

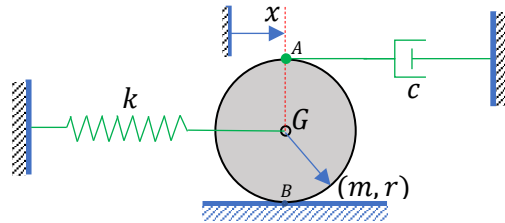
$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(t)$$



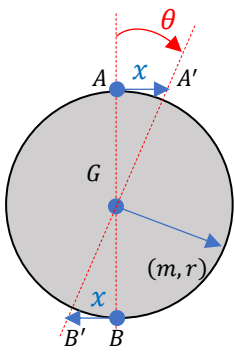
Exercice 2

Un disque de masse m , de rayon r et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

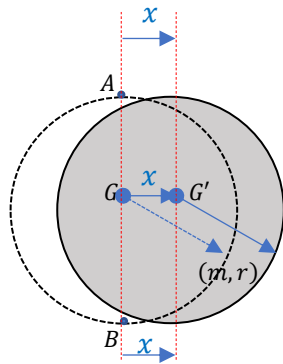
a) Trouver l'équation de mouvement du système en supposant que le disque roule sans glissement ($x = r\theta$ est le déplacement du centre de gravité G).



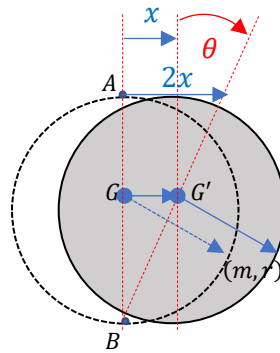
Solution :



Rotation



Translation



Rotation + Translation

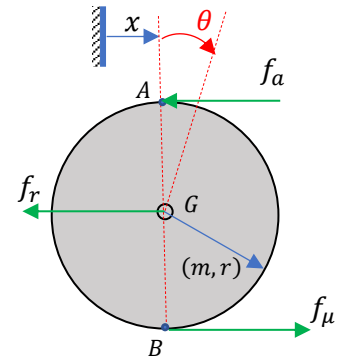


Diagramme du corps isolé

Déplacement d'un disque avec roulement sans glissement

On définit θ comme le déplacement angulaire du disque autour de son centre de gravité mesuré à partir de la position d'équilibre. Supposant que le disque roule sans glissement, le mouvement de translation et de rotation du disque sont reliés par l'équation

$$x = r\theta$$

a) La force de frottement, qui est inconnue, est définie comme f_μ , tandis que les forces de rappel et d'amortissement visqueux sont :

$$f_r = kx = kr\theta,$$

$$f_a = c\dot{x}_A = 2c\dot{x} = 2cr\dot{\theta}.$$

En utilisant les équations dynamiques linéaire et angulaire du disque



$$\sum_{\rightarrow}^{+} F = m\ddot{x}$$

$$f_{\mu} - kx - 2c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\sum \mathcal{M}_G = -f_{\mu}r - f_a r = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques, on trouve

$$-f_{\mu}r = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} + f_a r \Rightarrow f_{\mu} = -\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - f_a = -\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - 2c\dot{x}$$

Remplaçons l'équation des forces

$$\left(-\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - 2c\dot{x}\right) - kx - 2c\dot{x} = m\ddot{x}$$

On a $x = r\theta \Rightarrow \dot{x} = r\dot{\theta}$ et $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$

$$\left(-\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - 2cr\dot{\theta}\right) - kr\theta - 2cr\dot{\theta} = mr\ddot{\theta}$$

$$mr\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mr\ddot{\theta} + 4cr\dot{\theta} + kr\theta = 0$$

On obtient l'équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr\ddot{\theta} + 4cr\dot{\theta} + kr\theta = 0 \quad \text{avec } \theta \text{ comme grandeur physique}$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + 4c\dot{x} + kx = 0 \quad \text{avec } x \text{ comme grandeur physique}$$

Appliquer le formalisme de Lagrange

a) Energie cinétique

Le cylindre possède une translation x du centre de gravité et une rotation θ ($x = r\theta$) autour de lui.

Le moment d'inertie massique d'un cylindre autour d'un axe passant par son centre gravité $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

Energie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques de translation et de rotation.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}I_G(\dot{\theta})^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta})^2 \end{aligned}$$

Comme ($\dot{x} = r\dot{\theta}$)

$$T = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 + \frac{1}{4}mr^2(\dot{\theta})^2$$

$$T = \frac{3}{4}m(r\dot{\theta})^2 \quad \text{ou} \quad T = \frac{3}{4}m(\dot{x})^2$$



b) Energie potentielle

A l'instant t le centre de gravité du cylindre se déplace de x en roulant.

Le ressort à gauche s'allonge de (x) .

$$V = \frac{1}{2}k(x)^2 \quad \text{ou} \quad V = \frac{1}{2}kr^2(\theta)^2$$

c) Fonction de dissipation

L'amortisseur s'allonge de $(2x = 2r\theta)$.

$$D = \frac{1}{2}c(2\dot{x})^2 = 2c(\dot{x})^2 \quad \text{ou} \quad D = 2cr^2(\dot{\theta})^2$$

d) Equation de Mouvement

Le système n'est pas amorti ni forcé les équations de Lagrange deviennent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots$$

Comme il s'agit d'un système à 1DDL nous choisissons entre x et θ , sachant que $(x = r\theta)$.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = kr^2\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 4cr^2\dot{\theta}$$

L'équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + 4cr^2\dot{\theta} + kr^2\theta = 0$$

ou
$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + 4c\dot{x} + kx = 0$$



Exercice 3

Une tige AB de masse m , de longueur l oscille autour d'un pivot O se trouvant à $l/4$ de son extrémité supérieure A qui est retenue par un amortisseur de coefficient d'amortissement c . Un ressort de constante de raideur k est fixé au point D se trouvant à $l/4$ de son extrémité inférieure B . L'extrémité B est soumise à une force harmonique $F(t) = F_0 \cos \Omega t$. Trouver l'équation de mouvement du système en fonction de l'angle θ (θ est faible).

<p>Marche à suivre</p> <ul style="list-style-type: none"> • Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation passant par O. • Déterminer les déplacements x_A et x_D en fonction de l'angle de rotation θ. • Représenter et évaluer les forces appliquées sur la tige (poids, force d'amortissement, force de rappels...). • Evaluer les moments de ces forces par rapport au centre de rotation O. • Isoler la tige et appliquer la loi de la dynamique. • Ecrire l'équation de mouvement en fonction de θ et de ses dérivés. 		
--	--	--

- Le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation passant par O .

$$I_O = I_G + m\overline{OG}^2$$

$$I_O = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2$$

$$I_O = \frac{7}{48}ml^2.$$

- Les déplacements x_A et x_D en fonction de l'angle de rotation θ .

$$x_A = \overline{OA} \sin \theta \cong \frac{l}{4}\theta$$

$$x_D = \overline{OD} \sin \theta \cong \frac{1}{2}l\theta$$

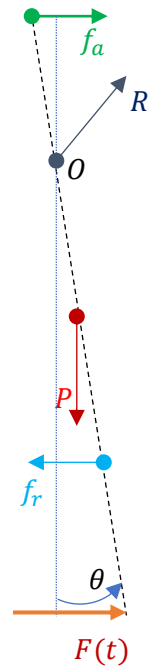
(θ est faible $\Rightarrow \sin \theta \cong \theta$ et $\cos \theta \cong 1$)

- Représentation des forces appliquées sur la tige (poids, force d'amortissement, force de rappels, ...).



Application de la méthode de Newton

Les forces appliquées	
- Le poids	$P = mg$
- La force de rappel du ressort	$f_r = kx_D = k \frac{l}{2} \theta$
- La force d'amortissement	$f_a = c\dot{x}_A = c \frac{l}{4} \dot{\theta}$
- La réaction inconnue du support	R (inconnue)
Les moments par rapport au centre de rotation O .	
- Le moment du poids	$\mathcal{M}_{P/O} = mg \frac{l}{4} \theta = \frac{1}{4} mgl \theta$
- Le moment de la force de rappel	$\mathcal{M}_{f_r/O} = k \frac{l}{2} \theta \frac{l}{2} = \frac{1}{4} kl^2 \theta$
- Le moment de la force d'amortissement	$\mathcal{M}_{f_a/O} = c \frac{l}{4} \dot{\theta} \frac{l}{4} = \frac{1}{16} cl^2 \dot{\theta}$
- Le moment de la réaction du support	$\mathcal{M}_{R/O} = 0$
- Le moment de la force d'excitation	$\vec{\mathcal{M}}_{F(t)/O} = \vec{OB} \wedge \vec{F}(t)$ $\mathcal{M}_{F(t)/O} = \frac{3l}{4} \cdot F(t)$



- Isoler la tige et appliquer la loi de la dynamique.

Somme des moments par rapport au point de rotation O est égale au moment d'inertie massique par rapport à O multiplier par l'accélération angulaire

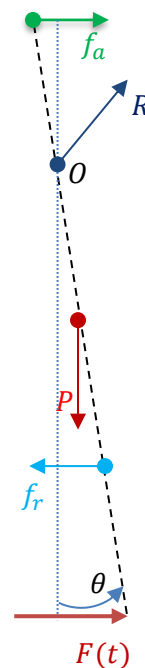
$$+\cup \mathcal{M}_{f_i/O} = I_0 \ddot{\theta}$$

$$-\frac{1}{4} mgl \theta - \frac{1}{4} kl^2 \theta - \frac{1}{16} cl^2 \dot{\theta} + F(t) \frac{3l}{4} \theta = \frac{7}{48} ml^2 \ddot{\theta}$$

- L'équation de mouvement en fonction de θ et de ses dérivés.

$$\frac{7}{48} ml^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{16} cl^2 \dot{\theta} + \frac{1}{4} (mgl + kl^2) \theta = F(t) \frac{3l}{4}$$

$$\frac{7}{48} ml^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{16} cl^2 \dot{\theta} + \frac{1}{4} (mgl + kl^2) \theta = \frac{3l}{4} \cdot F_0 \cos \Omega t$$





Application de la Méthode de Lagrange

a) Energie cinétique

La tige possède un mouvement de rotation θ autour de l'axe passant par le point O .

Le moment d'inertie massique de la tige autour d'un axe passant par le point O est :

$$I_O = \frac{7}{48} ml^2.$$

$$T = \frac{1}{2} I_O (\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \frac{7}{48} ml^2 (\dot{\theta})^2$$

b) Energie potentielle

Energie potentielle du système est la somme des énergies potentielles de déformation élastique et de gravitation.

$$V = \frac{1}{2} k (x_D)^2 + mgh$$

Avec l'allongement du ressort $x_D = \overline{OD} \sin \theta \cong \frac{1}{2} l \theta$

Et l'élévation du centre de gravité $h = \frac{l}{4} (1 - \cos \theta)$ avec $(1 - \cos \theta) \approx \frac{1}{2} \theta^2$

$$V = \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{2} l \theta\right)^2 + mg \frac{l}{4} \frac{1}{2} \theta^2 = \frac{1}{8} (kl^2 + mgl) \theta^2$$

c) Fonction de dissipation

L'amortisseur s'allonge de $x_A = \overline{OA} \sin \theta \cong \frac{l}{4} \theta$ avec une vitesse $\dot{x}_A = \frac{l}{4} \dot{\theta}$

$$D = \frac{1}{2} c (\dot{x}_A)^2 = \frac{1}{2} c \left(\frac{l}{4} \dot{\theta}\right)^2 \quad \text{ou} \quad D = \frac{1}{32} c (\dot{\theta})^2$$

d) Le travail des forces extérieure

$$W = F(t) \cdot x_B \quad \text{avec} \quad x_B = \overline{OB} \sin \theta \cong \frac{3}{4} l \theta$$

La force généralisée

$$F_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{3}{4} l F(t)$$

L'Equation de Lagrange devient



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
University of Science and Technology of Oran - Mohamed BOUDIAF
Faculty of Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering

*BOUTCHICHA
Djilali*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = F_{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{7}{24} ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4} (kl^2 + mgl)\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{16} c\dot{\theta}$$

$$F_{\theta} = \frac{3l}{4} \cdot F_0 \cos \Omega t$$

L'équation de mouvement

$$\frac{7}{48} ml^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{16} cl^2 \dot{\theta} + \frac{1}{4} (mgl + kl^2)\theta = \frac{3l}{4} \cdot F_0 \cos \Omega t$$