الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحـــــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

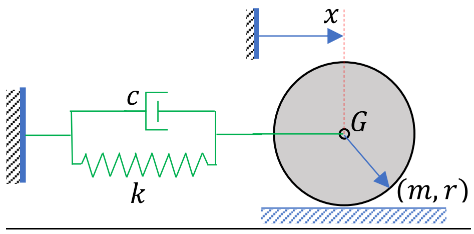
BOUTCHICHA
Djilali

Vibration libre d'un système à un degré de liberté

Exercice 1

Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

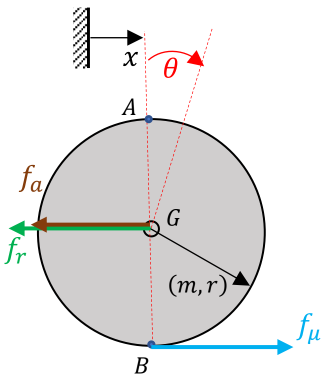
a) Trouver l'équation de mouvement du système en supposant que le disque roule sans glissement.
b) Quelle est la valeur de c qui correspond à l'amortissement critique ?
c) L'amortissement est critique, le disque est relâché à partir de $x(0) = x_0$ sans vitesse initiale, trouver le déplacement du centre du disque.



Solution

On définit θ comme le déplacement angulaire du disque autour de son centre de gravité mesuré à partir de la position d'équilibre. Supposant que le disque roule sans glissement, le mouvement de translation et de rotation du disque sont reliés par l'équation

$x = r\theta$



a) La force de frottement, qui est inconnue, est définie comme f_μ , tandis que les forces de rappel et d'amortissement visqueux sont :

$f_r = kx,$

$f_a = c\dot{x}.$

En utilisant les équilibres dynamiques linéaire et angulaire du disque

$$\sum F = (f_\mu - kx - c\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\sum \mathcal{M}_G = (-f_\mu r) = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques, on trouve

BOUTCHICHA
Djilali

$(f_\mu r) = -\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad f_\mu = -\frac{1}{2}mr\ddot{\theta}$

Remplaçons l'équation des forces

$$-\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

On a $x = r\theta \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = r\dot{\theta}$ et $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$

$$\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} + cr\dot{\theta} + kr\theta + mr\ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{3}{2}mr\ddot{\theta} + cr\dot{\theta} + kr\theta = 0$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

b) On peut écrire l'équation différentielle sous la forme standard

$$\ddot{x} + \frac{2c}{3m}\dot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

avec $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ et $\xi = \frac{c}{\sqrt{6km}}$

L'amortissement est critique pour $\xi = \frac{c}{\sqrt{6km}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad c = c_c = \sqrt{6km}$

c) Pour un amortissement critique la réponse du système est :

$$x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-\omega_n t}$$

L'expression de la vitesse est :

$$\dot{x}(t) = \big((C_2 - \omega_n C_1) - (\omega_n C_2)t\big)e^{-\omega_n t}$$

Si le système est relâché à partir du repos avec un déplacement initial x_0.

En remplaçant dans la réponse

$x_0 = x(0) \quad \Longrightarrow \quad C_1 = x_0$

$\dot{x}(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 - \omega_n C_1 = 0 \Longrightarrow C_2 = \omega_n C_1 = \omega_n x_0$

La solution avec des conditions initiales

$$x(t) = x_0(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$$

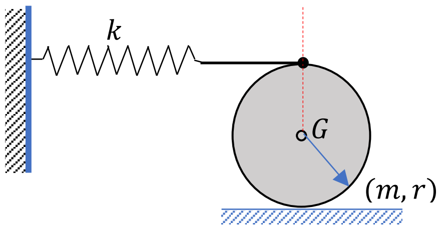
Exercice 2

Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

On suppose que le disque roule sans glissement $(x = r\theta)$, x est le déplacement du centre du disque.

a) Déterminer l'équation de mouvement du système.

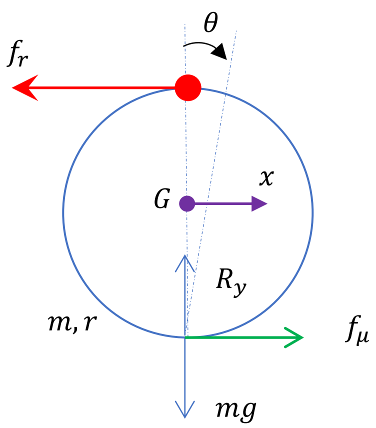
b) Déterminer la pulsation naturelle.



Solution

On définit θ comme le déplacement angulaire du disque autour de son centre de gravité mesuré à partir de la position d'équilibre. Supposant que le disque roule sans glissement, le mouvement de translation et de rotation du disque sont reliés par l'équation $x = r\theta$, le ressort s'allonge de $s = 2x = 2r\theta$.

Diagramme du corps libre



a) La force de frottement, qui est inconnue, est définie comme f_μ , tandis que la force de est :

$f_r = ks = 2kx,$

En utilisant les équilibres dynamiques linéaire et angulaire du disque

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$f_\mu - f_r = m\ddot{x}$$

$$f_\mu - 2kx = m\ddot{x}$$

$$\sum \mathcal{M}_G = I_G\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

BOUTCHICHA
Djilali

$-(f_\mu r + f_r r) = \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta}$

$f_\mu = -\frac{1}{2} m r \ddot{\theta} - f_r$

$f_\mu = -\frac{1}{2} m r \ddot{\theta} - 2kx$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques, on trouve

$f_\mu = -\frac{1}{2} m r \ddot{\theta} - 2kr\theta$

Remplaçons l'équation des forces

$f_\mu - 2kx = m\ddot{x}$

$-\frac{1}{2} m r \ddot{\theta} - 2kr\theta - 2kr\theta = m r \ddot{\theta}$

$\frac{3}{2} m r \ddot{\theta} + 4kr\theta = 0$

Ou bien, avec $x = r\theta$ et $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$

$\frac{3}{2} m \ddot{x} + 4kx = 0$

الجمهوريـــــــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

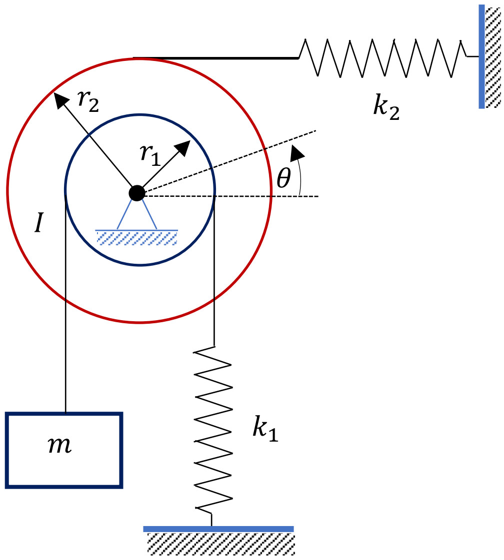
BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 3

Sur la figure ci-contre, en l'absence de gravité, les ressorts ne sont pas étirés dans la position d'équilibre.

a) Déterminez l'allongement de chaque ressort par rapport à sa longueur non étirée lorsque le système présenté est en équilibre statique.

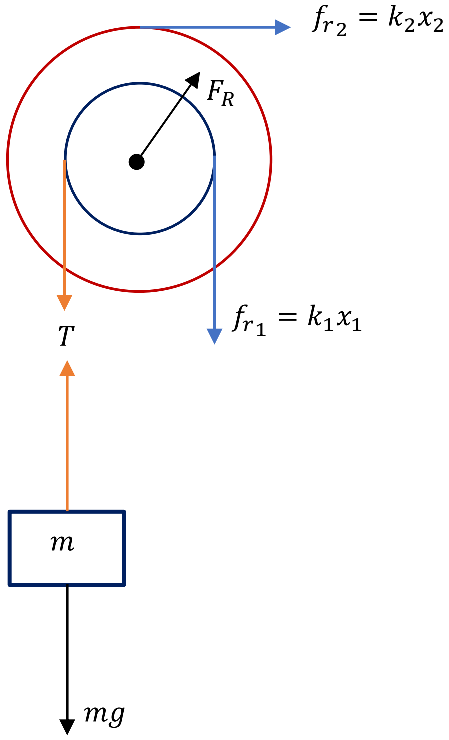
b) Si le système est libéré de la position non étirée des ressorts, quelle est la vitesse angulaire maximale du disque pendant le mouvement résultant ?



Solution :

a) Nous définissons les coordonnées x, θ, x_1 et x_2 comme indiqué dans la figure, qui sont liées

$$x = r_1\theta, x_1 = r_1\theta, et\ x_2 = r_2\theta$$



Diagrammes des corps isolés

BOUTCHICHA
Djilali

En utilisant le DCL indiqué à droite, l'équilibre dynamique des forces sur le bloc de masse m donne

$$\sum F = ma_G$$

$$mg - T = m\ddot{x}$$

Tandis que l'équilibre des moments dans le disque donne

$$\sum M_o = I_o\alpha$$

$$Tr_1 - k_1x_1r_1 - k_2x_2r_2 = I\ddot{\theta}$$

En éliminant la tension inconnue T de ces équations et en utilisant les relations entre les coordonnées, l'équation du mouvement devient

$$(I + mr_1^2)\ddot{\theta} + (k_1r_1^2 + k_2r_2^2)\theta = mgr_1$$

Détermination de l'équation de mouvement par la méthode de conservation d'energie

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

L'energie potentielle

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 - mgx$$

En utilisant les relations entre les coordonnées,

$$T = \frac{1}{2}mr_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2}k_1r_1^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2r_2^2\theta^2 - mgr_1\theta$$

Conservation de l'energie mécanique

$$T + V = Cte$$

$$\frac{1}{2}mr_1^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k_1r_1^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2r_2^2\theta^2 - mgr_1\theta = Cte$$

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

$$mr_1^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + I\dot{\theta}\ddot{\theta} + k_1r_1^2\theta\dot{\theta} + k_2r_2^2\theta\dot{\theta} - mgr_1\dot{\theta} = 0$$

$$\left(mr_1^2\ddot{\theta} + I\ddot{\theta} + k_1r_1^2\theta + k_2r_2^2\theta - mgr_1\right)\dot{\theta} = 0$$

$$(mr_1^2 + I)\ddot{\theta} + (k_1r_1^2 + k_2r_2^2)\theta = mgr_1$$

L'angle de rotation à l'équilibre du disque s'avère donc être

$$\theta_{eq} = \frac{mgr_1}{(k_1 r_1^2 + k_2 r_2^2)}$$

Avec ceci, l'allongement à l'équilibre de chaque ressort s'avère être

$$x_1 = r_1 \theta_{eq} = \frac{mgr_1^2}{(k_1 r_1^2 + k_2 r_2^2)}$$

$$x_2 = r_2 \theta_{eq} = \frac{mgr_1 r_2}{(k_1 r_1^2 + k_2 r_2^2)}$$

b) La réponse générale libre du disque peut être exprimée comme suit :

$$\theta(t) = \theta_{eq} + A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

où θ_{eq} est donné ci-dessus, A_1 et A_2 sont des constantes arbitraires, et

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 r_1^2 + k_2 r_2^2}{I + mr_1^2}}$$

Le système est libéré avec les conditions initiales :

$$\theta(0) = 0$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

de sorte que la résolution des constantes arbitraires

$$A_1 = -\theta_{eq}$$

$$A_2 = 0$$

Par conséquent, la solution est

$$\theta(t) = \theta_{eq}(1 - \cos \omega_n t)$$

La vitesse angulaire du disque devient

$$\dot{\theta}(t) = (\theta_{eq} \omega_n) \sin \omega_n t$$

qui a l'amplitude

$$\dot{\theta}_{max} = \theta_{eq} \omega_n = \frac{mgr_1}{\sqrt{(k_1 r_1^2 + k_2 r_2^2)(I + mr_1^2)}}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 4

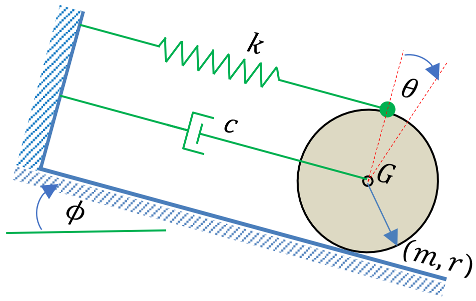
Pour le système illustré à droite, le disque de masse m roule sans glissement et x mesure le déplacement du disque à partir de la position non étirée du ressort. La surface est inclinée d'un angle ϕ de par rapport à la verticale.

a) Trouver l'équation du mouvement. Ne négligez pas la gravité.

b) Si le système est sous amorti, quelle est la fréquence des vibrations libres de ce système en fonction des paramètres k, c et m.

c) Pour quelle valeur de la constante d'amortissement c le système est-il amorti de manière critique ?

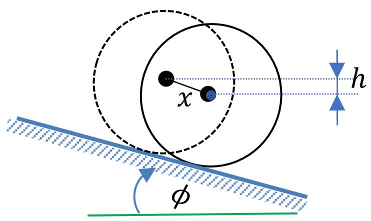
d) Quel est le déplacement statique du disque à l'équilibre ?



Solution :

a) L'équation de mouvement

Lorsque le disque tourne d'un angle θ, il se déplace de $x = r\theta$ le ressort s'allonge de $s = 2r\theta = 2x$



L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \quad \text{où} \quad I_G = \frac{1}{2}mr^2$$

$$T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}ks^2 - mgh = \frac{1}{2}k(2r)^2\theta^2 - mgr\theta\sin\phi$$

La fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 = \frac{1}{2}c\left(r\dot{\theta}\right)^2$$

L'équation de Lagrange

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k(2r)^2\theta - mgr\sin\phi$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = cr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + k(2r)^2\theta - mgr\sin\phi + cr^2\dot{\theta} = 0$$

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + cr^2\dot{\theta} + 4kr^2\theta = mgr\sin\phi$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 4kx = mg\sin\phi$$

Puisque la force de gravitation a été incluse dans le développement de cette équation de mouvement, les coordonnées sont mesurées par rapport à la position non étirée du ressort.

b) En supposant que le système soit sous amorti, la fréquence des vibrations libres amorties est

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, où

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{8k}{3m}}\,, \qquad et \qquad \xi = \frac{c_{eq}}{2\sqrt{k_{eq}m_{eq}}} = \frac{c}{2\sqrt{6km}}$$

c) Le système est amorti de manière critique lorsque $\xi = 1$, ce qui correspond à un coefficient d'amortissement critique

$c_{cr} = 2\sqrt{6km}$.

d) Le système est stationnaire en équilibre statique, de sorte que $x = x_0 =$ constant - x et $\dot{x}$ disparaissent et l'équation du mouvement se réduit à

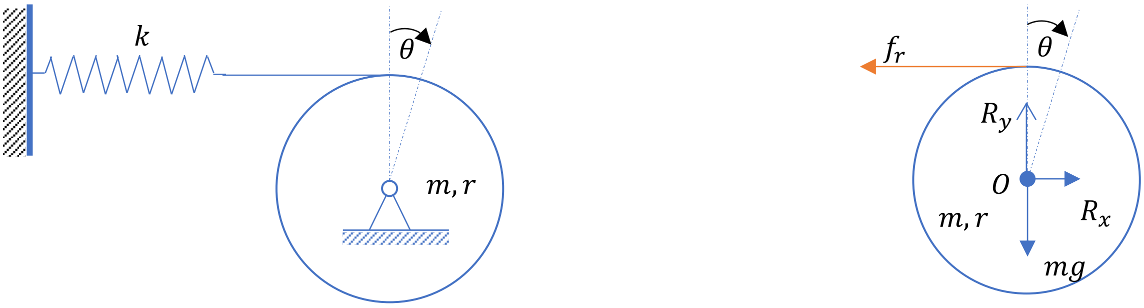
$4kx_0 = mg\sin\phi$.

En résolvant pour x_0, le déplacement à l'équilibre est

$$x_0 = \frac{mg\sin\phi}{4k}.$$

Exercice 5

Déterminer la pulsation propre (naturelle) du système illustré ci-dessous.



L'énergie cinétique (le disque a un mouvement de rotation)

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right) \dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle (pour une rotation θ du disque le ressort s'allonge de $x = r\theta$)

$$V = \frac{1}{2} k (r\theta)^2$$

L'énergie mécanique (est constante pour un système conservatif)

$$E_M = T + V$$

$$E_M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k (r\theta)^2$$

$$\frac{dE_M}{dt} = 0$$

$$2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right) \dot{\theta}\ddot{\theta} + 2\frac{1}{2} k r^2 \theta\dot{\theta} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} + k r^2 \theta\right) \dot{\theta} = 0$$

L'équation de mouvement

$$\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} + k r^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{m} \theta = 0$$

La pulsation propre

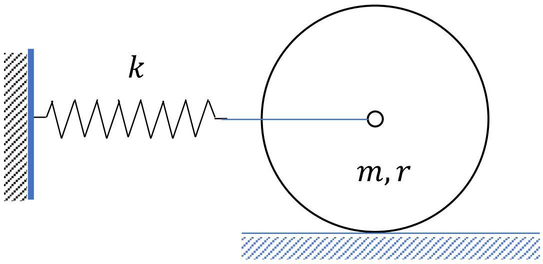
$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

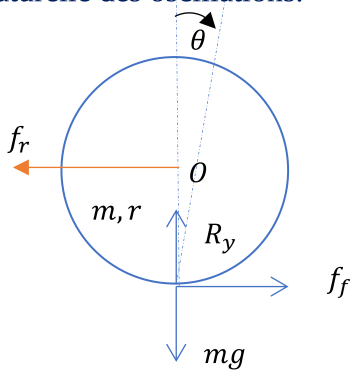
الجمهوريـــــــــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العــــــالي والبحــــــث العلــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 6

Un cylindre de masse m et de rayon r peut rouler sans glissement, il est retenu par un ressort de raideur k. Déterminer la fréquence naturelle des oscillations.





L'énergie cinétique (le disque a un mouvement de rotation et un mouvement de translation)

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle (pour une rotation θ du disque le ressort s'allonge de $x = r\theta$)

$$V = \frac{1}{2} k (r\theta)^2$$

L'énergie mécanique (est constante pour un système conservatif)

$$E_M = T + V$$

$$E_M = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k r^2 \theta^2$$

$$\frac{dE_M}{dt} = 0$$

$$\left(\frac{3}{2} m r^2\right) \dot{\theta}\ddot{\theta} + k r^2 \theta \dot{\theta} = 0$$

$$\left(\frac{3}{2} m r^2 \ddot{\theta} + k r^2 \theta\right) \dot{\theta} = 0$$

L'équation de mouvement

$$\frac{3}{2} m r^2 \ddot{\theta} + k r^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{3m} \theta = 0$$

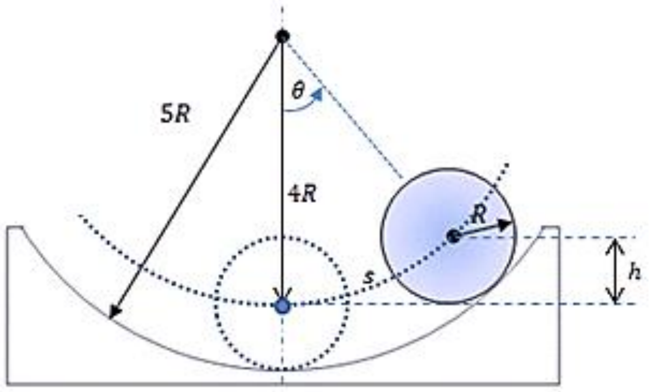
La pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 7

Une sphère solide de rayon R roule sans glisser dans une cuve cylindrique de rayon $5R$ comme le montre la figure ci-dessous. Montrer que, pour de petits déplacements à partir de la position d'équilibre perpendiculaires à l'axe de la cuve, la sphère exécute un mouvement harmonique simple avec une période $T = 2\pi\sqrt{28R/5g}$.



L'énergie cinétique de la sphère

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_O\Omega^2$$

où Ω est la vitesse de rotation de la sphère autour son centre de gravitation.

Comme le centre de la sphère se déplace suivant un cercle de rayon $4R$ son déplacement à partir de sa position d'équilibre est $s = (4R)\theta$ est sa vitesse $v = \frac{ds}{dt} = 4R\dot{\theta}$.

et aussi comme la sphère roule sans glissement, $v = \frac{ds}{dt} = R\Omega$ alors $\Omega = \frac{v}{R} = 4\dot{\theta}$

$$T = \frac{1}{2}m(4R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)(4\dot{\theta})^2 = \frac{112mR^2}{10}\dot{\theta}^2$$

Quand la sphère se déplace d'un angle θ son centre de gravité s'élève d'une hauteur $h = 4R(1 - \cos\theta)$ et son énergie potentielle de gravitation augmente de $V_g = mgh = mg \times 4R(1 - cos\,\theta)$.

Pour de faibles angles $(1 - cos\,\theta) \approx \frac{\theta^2}{2}$. Ainsi $V_g \approx 2mgR\theta^2$.

L'énergie mécanique totale est :

$$E = \frac{112mR^2}{10}\dot{\theta}^2 + 2mgR\theta^2$$

Comme l'énergie totale est constante pour un système conservatif

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{224mR^2}{10}\dot{\theta}\ddot{\theta} + 4mgR\theta\dot{\theta} = 0$$

Après simplification on obtient l'équation de mouvement

$$\frac{28mR^2}{5}\ddot{\theta} + mgR\theta = 0$$

La pulsation propre est $\omega_n = \sqrt{\frac{5g}{28R}}$

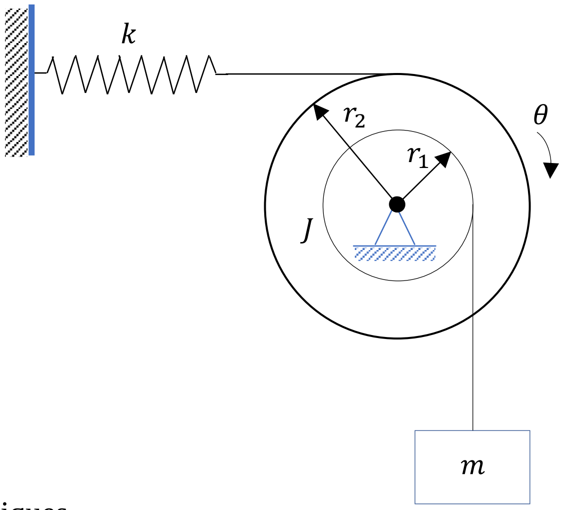
et la période du mouvement harmonique simple $T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{28R}{5g}}$

الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

<u>Exercice 8</u>

Déterminer la pulsation propre du système masse (m) poulie (J) ressort (k).



Relations cinématiques

Lorsque la poulie J tourne d'un angle θ le ressort s'allonge de $x_2 = r_2\theta$ et la masse m descend de $x_1 = r_1\theta$.

L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(r_1\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(r_2\theta)^2$$

L'énergie mécanique totale

$$E = \frac{1}{2}m\left(r_1\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(r_2\theta)^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$mr_1^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + J\dot{\theta}\ddot{\theta} + kr_2^2\theta\dot{\theta} = 0$$

L'équation de mouvement

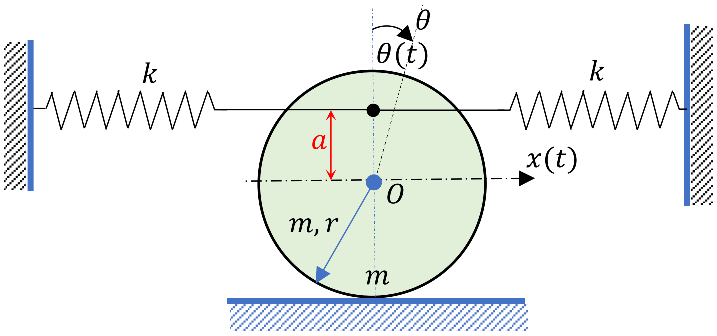
$$(mr_1^2 + J)\ddot{\theta} + kr_1^2\theta = 0$$

La pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kr_2^2}{(mr_1^2+J)}}$$

Exercice 9

Un disque est relié à deux ressorts. Utiliser la méthode de la conservation d'énergie pour calculer la fréquence naturelle du système pour de petits angles $\theta(t)$ d'oscillation.



Relations cinématiques

Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ, il se déplace de $x = r\theta$ le premier ressort s'allonge de $s = (r + a)\theta$ et le second ressort se comprime de $s = (r + a)\theta$.

L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad \text{où} \quad I = \frac{1}{2}mr^2$$

$$T = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle

$$V = 2\,\frac{1}{2}k(a + r)^2\theta^2$$

L'énergie mécanique totale

$$E = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + k(a + r)^2\theta^2$$

$$= \dot{\theta}^2 + k(a + r)^2\theta^2 = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2k(a + r)^2\theta\dot{\theta} = 0$$

L'équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + 2k(a + r)^2\theta = 0$$

La pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4k(a + r)^2}{3mr^2}} = \frac{a + r}{r}\sqrt{\frac{4k}{3m}}$$

الجمهوريـــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العـــــــالي والبحــــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 10

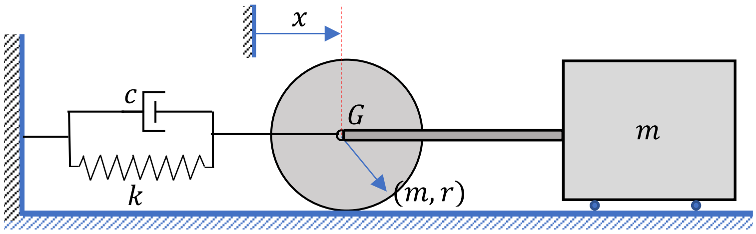
Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}mr^2$ est attaché à un bloc de masse m.

Le disque roule sans glissement et la masse se déplace sans frottement.

a. Trouver l'équation de mouvement de de système.

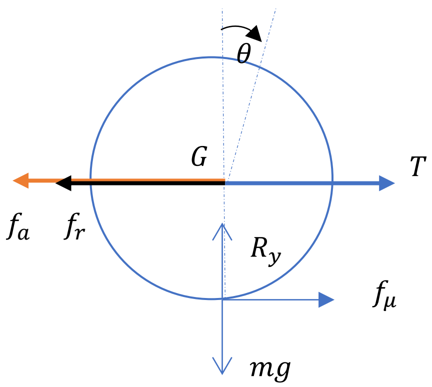
b. Pour $m = 2\ kg$, $c = 0.5\ (N.s)/m$ et k = 8 N/m trouver la fréquence des oscillations du système.

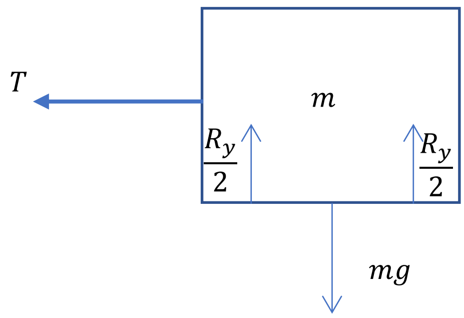
c. Le disque est relâché à partir de $x(0) = x_0$ sans vitesse initiale, trouver le déplacement de la masse.



---

a) L'équation de mouvement (1ère méthode)





On trace les diagrammes des corps isolés

Les forces appliquées sur le bloc m dans la direction x.

La tension T

Les forces appliquées sur le disque dans la direction x.

Force de rappel du ressort $f_r = k * x$.

Force d'amortissement $f_a = c * \dot{x}$.

La tension T

Force d'adhérence f_μ inconnue.

La relation la rotation et le déplacement du disque est $x = \theta * r$

Les relations cinématiques

$$x = r\theta\ ;\ \dot{x} = r\dot{\theta}\ ;\ \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

En utilisant les équilibres dynamiques linéaire du bloc

$$\sum F = ma_x$$
$$-T = ma_x$$
$$T = -m\ddot{x}$$

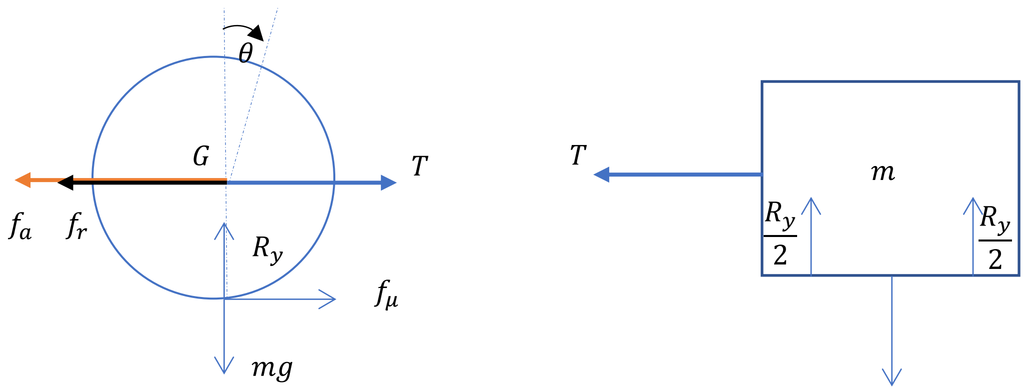
En utilisant les équilibres dynamiques linéaire et angulaire du disque

$$\sum F = ma_x$$
$$-f_a - f_r + f_\mu + T = ma_x$$
$$-c\dot{x} - kx + f_\mu = 2m\ddot{x}$$
$$\sum \mathcal{M}_G = I_G\ddot{\theta}$$
$$-f_\mu r = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mr\ddot{x}$$
$$f_\mu = -\frac{1}{2}m\ddot{x}$$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques,

$$-c\dot{x} - kx - \frac{1}{2}m\ddot{x} = 2m\ddot{x}$$
$$\frac{5}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

b) L'équation de mouvement (2ème méthode)



On trace les diagrammes des corps isolés
Les forces appliquées sur le bloc m dans la direction x.
La tension T
Les forces appliquées sur le disque dans la direction x.
Force de rappel du ressort $f_r = k * x$.
Force d'amortissement $f_a = c * \dot{x}$.
La tension T
Force d'adhérence f_μ inconnue.
La relation la rotation et le déplacement du disque est $x = \theta * r$
Les relations cinématiques

$$x = r\theta\ ;\ \dot{x} = r\dot{\theta}\ ;\ \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

BOUTCHICHA
Djilali

En utilisant les équilibres dynamiques linéaire du bloc

$$\sum F = ma_x$$
$$-T = ma_x$$
$$T = -m\ddot{x}$$

En utilisant les équilibres dynamiques autour du centre instantané de rotation du disque

$$\sum \mathcal{M}_P = I_P\ddot{\theta}$$
$$-f_a r - f_r r + Tr = I_P\ddot{\theta}$$
$$I_P = I_G + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2 \quad \text{(Relation de Huygens)}$$
$$-c\dot{x}r - kxr - m\ddot{x}r = \left(\frac{3}{2}mr^2\right)\ddot{\theta}$$
$$\frac{5}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

c) L'équation de mouvement (3ème méthode)

L'énergie cinétique

(Le disque a un mouvement de rotation et un mouvement de translation)

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\theta}^2 + m\dot{x}^2$$
$$T = \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + m\dot{x}^2 = \frac{5}{4}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}k(x)^2$$

La fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$$

L'équation de Mouvement (Lagrange)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2}m\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{5}{2}m\ddot{x}$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$$

D'où l'équation de mouvement

$$\frac{5}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

d) La fréquence d'oscillation du système

On transforme l'équation de mouvement sous la forme : $\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$

$$\frac{5}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2c}{5m}\dot{x} + \frac{2k}{5m}x = 0$$

La pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{5m}}$$

Le facteur d'amortissement

$$2\xi\omega_n = \frac{2c}{5m}$$

$$\xi = \frac{2c}{5m\omega_n} = \frac{c}{5m}\sqrt{\frac{5m}{2k}} = \frac{c}{\sqrt{10km}}$$

Application numérique :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{5m}} = \sqrt{\frac{2*8}{5*2}} = 1.265 \ \ rad/_{s}$$

$$\xi = \frac{0.5}{\sqrt{10*8*2}} = 3.9528 \times 10^{-2} < 1$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1.265\sqrt{1-(3.95\times 10^{-2})^2} = 1.264 \ \ rad/s$$

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{0.78995}{2\pi} = \ 0.2 \ \ Hz$$

e) Le déplacement du bloc

La réponse est de la forme $(\xi < 1)$

$$x(t) \ = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\}$$

L'expression de la vitesse

$$\dot{x}(t) \ = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\{A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\} + e^{-\xi\omega_n t}[-\omega_d A_1\sin\omega_d t + \omega_d A_2\cos\omega_d t]$$

Les conditions initiales

$$x(0) = x_0$$

$$e^0\{A_1\cos 0 + A_2\sin 0\} = x_0 \Longrightarrow A_1 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$-\xi\omega_n e^0\{A_1\cos 0 + A_2\sin 0\} + e^0[-\omega_d A_1\sin 0 + \omega_d A_2\cos 0] = 0$$

$$-\xi\omega_n A_1 + \omega_d A_2 = 0 \Longrightarrow A_2 = \frac{\xi\omega_n x_0}{\omega_d}$$

$$x(t) \ = e^{-\xi\omega_n t}\left\{x_0\cos\omega_d t + \frac{\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right\}$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

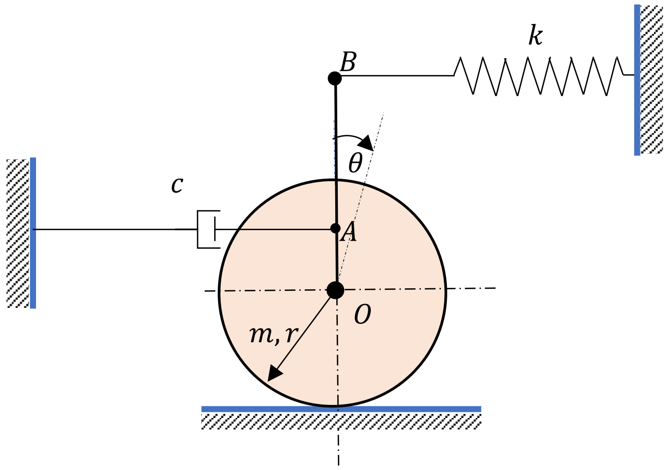
BOUTCHICHA Djilali

Exercice 11

Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_O = \frac{1}{2}mr^2$.

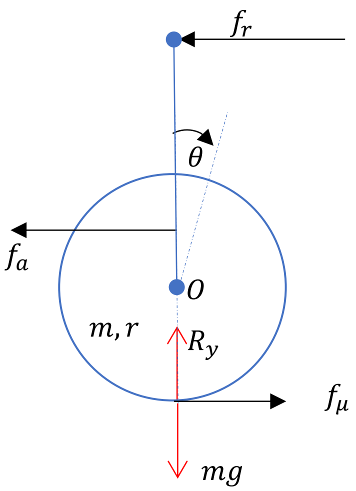
Une tige de masse négligeable est liée rigidement au disque de dimensions $OB = 2r$, le point ou est fixé l'amortisseur se trouve à OA =r/2 .

a) Déterminer l'équation de mouvement du système en supposant que le disque roule sans glissement en fonction de x.
b) Déterminer la pulsation propre et le facteur d'amortissement.
c) Si le coefficient d'amortissent est $c = \sqrt{km}$, le disque est relâché à partir de θ_0 et une vitesse initiale $\dot{\theta}_0$, trouver le déplacement $x(t)$ du centre du disque.



Solution

Diagramme du Corps Libre



On trace le diagramme du corps isolé
Les forces appliquées sur le disque dans la direction x.
Force de rappel du ressort $f_r = k * x_B$.
Force d'amortissement $f_a = c * \dot{x}_A$.
Force d'adhérence f_μ inconnue.
Le déplacement du centre de disque est $x = r\theta$

$$x_A = \left(x + \frac{r}{2}\theta\right) = \frac{3}{2}x$$

$$x_B = (x + 2r\theta) = 3kx$$

Les relations cinématiques

$$\dot{x} = r\dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

D'où les forces

$$f_r = k * x_B = k \times (x + 2r\theta) = 3kx$$

$$f_a = c * \dot{x}_A = c\left(\dot{x} + \frac{r}{2}\dot{\theta}\right) = \frac{3}{2}c\dot{x}$$

1ère Méthode

En utilisant les équilibres dynamiques linéaire et angulaire du disque

$$\sum F = ma_x$$

$$-f_a - f_r + f_\mu = ma_x$$

$$-\frac{3}{2}c\dot{x} - 3kx + f_\mu = m\ddot{x}$$

$$\sum \mathcal{M}_O = I_O\ddot{\theta}$$

$$-\left(f_r 2r + f_\mu r + f_a\frac{r}{2}\right) = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mr\ddot{x}$$

$$-\left(2f_r + f_\mu + \frac{1}{2}f_a\right) = \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

$$f_\mu = -\frac{1}{2}m\ddot{x} - 2f_r - \frac{1}{2}f_a$$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques, on trouve

$$f_\mu = -\frac{1}{2}m\ddot{x} - 6kx - \frac{3}{4}c\dot{x}$$

Remplaçons l'équation des forces

$$-\frac{3}{2}c\dot{x} - 3kx - \frac{1}{2}m\ddot{x} - 6kx - \frac{3}{4}c\dot{x} \quad = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x} + \frac{9}{4}c\dot{x} + 9kx = 0}$$

2ème Méthode

En utilisant les équilibres dynamiques autour du *centre instantané de rotation* du disque

$$\sum \mathcal{M}_P = I_P\ddot{\theta}$$

$$-f_a \times \frac{3}{2}r - f_r \times 3r = I_P\ddot{\theta}$$

$I_P = I_0 + mr^2$ (Relation de Huygens)

$$-\frac{3}{2}c\dot{x} \times \frac{3}{2}r - 3kx \times 3r = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\ddot{\theta}$$

$$-\frac{9}{4}c\dot{x} - 3kx \times 3r = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\frac{3}{2}m\ddot{x} + \frac{9}{4}c\dot{x} + 9kx = 0}$$

BOUTCHICHA
Djilali

3ème Méthode

L'énergie cinétique (le disque a un mouvement de rotation et un mouvement de translation)

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m \dot{x}^2$$

L'énergie potentielle (pour une rotation θ du disque le ressort s'allonge de $3r\theta = 3x$)

$$V = \frac{1}{2} k (3x)^2 = \frac{9}{2} k x^2$$

La fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} c \left(\frac{3}{2}\dot{x}\right)^2$$

Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \, \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2} m \dot{x} \, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{3}{2} m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 9kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \frac{9}{4} c \dot{x}$$

D'où l'équation de mouvement

$$\boxed{\frac{3}{2} m \ddot{x} + \frac{9}{4} c \dot{x} + 9kx = 0}$$

On transforme l'équation de mouvement sous la forme

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + \frac{9}{4} c \dot{x} + 9kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{2*9}{3*4}\frac{c}{m}\dot{x} + \frac{2*9}{3}\frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{3}{2}\frac{c}{m}\dot{x} + 6\frac{k}{m} x = 0$$

La pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

Le facteur d'amortissement

$$2\xi\omega_n = \frac{3}{2}\frac{c}{m}$$

$$\xi = \frac{3}{2}\frac{c}{m}\frac{1}{2\omega_n} = \frac{3}{2}\frac{c}{m}\frac{1}{2\sqrt{\frac{6k}{m}}_n} = \frac{3c}{4\sqrt{6km}}$$

Si $c = \sqrt{km}$

$$\xi = \frac{3\sqrt{km}}{4\sqrt{6km}} = \frac{3}{4\sqrt{6}} < 1$$

La réponse est de la forme

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\}$$

L'expression de la vitesse

$$\dot{x}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\} + e^{-\xi\omega_n t}[-\omega_d A_1 \sin\omega_d t + \omega_d A_2 \cos\omega_d t]$$

Les conditions initiales

$$\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow x(0) = r\theta_0$$

$$e^0\{A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0\} = r\theta_0$$

$$A_1 = r\theta_0$$

$$\dot{x}(0) = r\dot{\theta}_0.$$

$$-\xi\omega_n e^0\{A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0\} + e^0[-\omega_d A_1 \sin 0 + \omega_d A_2 \cos 0] = r\dot{\theta}_0$$

$$-\xi\omega_n A_1 + \omega_d A_2 = r\dot{\theta}_0$$

$$A_2 = \frac{r\dot{\theta}_0 + \xi\omega_n r\theta_0}{\omega_d}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{r\theta_0 \cos\omega_d t + \frac{r\dot{\theta}_0 + \xi\omega_n r\theta_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right\}$$

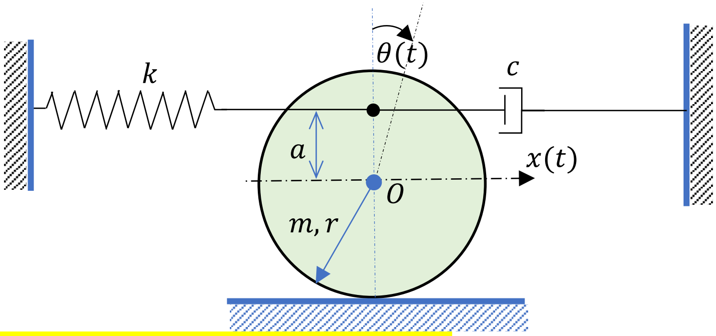
الجمهوريـــــــــــــــــة الجزائريـــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 12

Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_O = \frac{1}{2}mr^2$, roule sans glissement. Le disque est relié à un ressort et un amortisseur à une distance a du centre O.

a) Calculer l'énergie cinétique T, l'énergie potentielle V et la fonction de dissipation D.
b) Utiliser la méthode de Lagrange pour déterminer l'équation de mouvement ;
c) Calculer la fréquence naturelle du système pour de petits angles $\theta(t)$ d'oscillation.



L'équation de mouvement (méthode de Lagrange)

La relation entre la rotation et le déplacement du centre de gravité du disque est
$x = \theta * r$
Les relations cinématiques
$\dot{x} = r\dot{\theta}$
L'allongement du ressort
$e = x + a\theta = (r + a)\theta$;
La vitesse de déplacement de l'amortisseur
$\dot{e} = (r + a)\dot{\theta}$

L'énergie cinétique

(Le disque a un mouvement de rotation et un mouvement de translation)

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$T = \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$T = \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$
$$T = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle

$$V = \frac{1}{2}k(e)^2 = \frac{1}{2}k(r + a)^2\theta^2$$

La fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c(\dot{e})^2 = \frac{1}{2}c(r + a)^2\dot{\theta}^2$$

BOUTCHICHA
Djilali

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}\right)=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=\frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=k(r+a)^2\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}=c(r+a)^2\dot{\theta}$$

D'où l'équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}+c(r+a)^2\dot{\theta}+k(r+a)^2\theta=0$$

$$a=\frac{a}{r}r \Longrightarrow (r+a)\theta=\left(1+\frac{a}{r}\right)r\theta=\left(1+\frac{a}{r}\right)x$$

$$\frac{3}{2}mr\ddot{x}+c\left(1+\frac{a}{r}\right)^2r\dot{x}+k\left(1+\frac{a}{r}\right)^2rx=0$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}+c\left(1+\frac{a}{r}\right)^2\dot{x}+k\left(1+\frac{a}{r}\right)^2x=0$$

La pulsation propre

$$\omega_n=\sqrt{\frac{2k(r+a)^2}{3mr^2}}=\frac{(r+a)}{r}\sqrt{\frac{2k}{3m}}=\left(1+\frac{a}{r}\right)\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

الجمهوريــــــــــــــــة الجزائريــــــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــم العـــــــالي والبحـــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

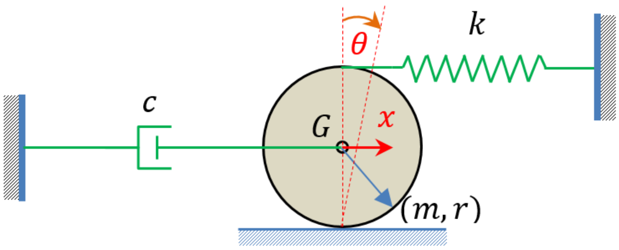
Exercice 12

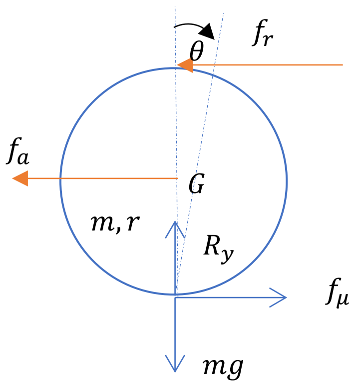
Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

a) Déterminer l'équation de mouvement du système en supposant que le disque roule sans glissement en fonction de x.

b) Déterminer la pulsation propre et le facteur d'amortissement.

c) Si le coefficient d'amortissement est $c = \frac{1}{2}\sqrt{km}$, le disque est relâché à partir de $\theta(0) = \theta_0 = 9°$ sans vitesse initiale, trouver le déplacement du centre du disque.





On trace le diagramme du corps isolé

Les forces appliquées sur le disque dans la direction x.

Force de rappel du ressort $f_r = k * x_r$.

Force d'amortissement $f_a = c * \dot{x}_G$.

Force d'adhérence f_μ inconnue.

La relation la rotation et le déplacement du disque est $x = \theta * r$

Les relations cinématiques

$$x = r\theta$$
$$\dot{x} = r\dot{\theta}$$
$$\ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

D'où les forces

$$f_r = k * x_r = k * 2x = 2kx$$
$$f_a = c * \dot{x}_G = c\dot{x}$$

1ère Méthode

En utilisant les équilibres dynamiques linéaire et angulaire du disque

$$\sum F = ma_x$$
$$-f_a - f_r + f_\mu = ma_x$$
$$-c\dot{x} - 2kx + f_\mu = m\ddot{x}$$
$$\sum \mathcal{M}_G = I_G\ddot{\theta}$$
$$f_r r + f_\mu r = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mr\ddot{x}$$
$$2kx + f_\mu = = \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques, on trouve

$$f_\mu = -\frac{1}{2}m\ddot{x} - 2kx$$

Remplaçons l'équation des forces

$$-c\dot{x} - 2kx - \frac{1}{2}m\ddot{x} - 2kx \quad = m\ddot{x}$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 4kx = 0$$

2ème Méthode

En utilisant les équilibres dynamiques autour du centre instantané de rotation du disque

$$\sum \mathcal{M}_P = I_P\ddot{\theta}$$

$$-f_a r - f_r \times 2r += I_P\ddot{\theta}$$

$$I_P = I_G + mr^2 \quad \text{(Relation de Huygens)}$$

$$-c\dot{x}r - 4kxr = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 4kx = 0$$

3ème Méthode

L'énergie cinétique (le disque a un mouvement de rotation et un mouvement de translation)

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle (pour une rotation θ du disque le ressort s'allonge de $2r\theta = 2x$)

$$V = \frac{1}{2}k(2x)^2 = 2kx^2$$

La fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$$

Equation de mouvement (Lagrange)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4kx$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$$

D'où l'équation de mouvement

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + 4kx = 0$$

On transforme l'équation de mouvement sous la forme

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{2c}{3m}\dot{x} + \frac{8k}{3m}x = 0$$

La pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{8k}{3m}} = 2\sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

Le facteur d'amortissement

$$2\xi\omega_n = \frac{2c}{3m}$$
$$\xi = \frac{c}{3m\omega_n} = \frac{c}{3m \times 2}\sqrt{\frac{3m}{2k}} = \frac{c}{2\sqrt{6km}}$$

Si $c = \frac{\sqrt{km}}{2}$

$$\xi = \frac{\frac{\sqrt{km}}{2}}{2\sqrt{6km}} = \frac{1}{4\sqrt{6}} < 1$$

La réponse est de la forme

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t\}$$

L'expression de la vitesse

$$\dot{x}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t\} + e^{-\xi\omega_n t}[-\omega_d A_1 \sin \omega_d t + \omega_d A_2 \cos \omega_d t]$$

Les conditions initiales

$$\theta(0) = \theta_0 \Rightarrow x(0) = r\theta_0$$
$$e^0\{A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0\} = r\theta_0$$
$$A_1 = r\theta_0$$
$$\dot{x}(0) = 0$$
$$-\xi\omega_n e^0\{A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0\} + e^0[-\omega_d A_1 \sin 0 + \omega_d A_2 \cos 0] = 0$$
$$-\xi\omega_n A_1 + \omega_d A_2 = 0$$
$$A_2 = \frac{\xi\omega_n r\theta_0}{\omega_d}$$
$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{r\theta_0 \cos \omega_d t + \frac{\xi\omega_n r\theta_0}{\omega_d} \sin \omega_d t\right\}$$