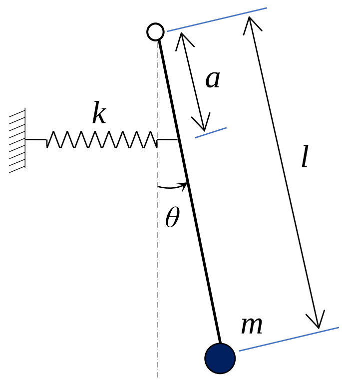
BOUTCHICHA
Djilali

Pendules

Exercice 1

Un pendule simple de longueur l et de masse m comporte un ressort de constante de raideur k qui lui est connecté, à une distance a au-dessous de son point de suspension.

Trouver la pulsation propre de vibration en utilisant la méthode de **Lagrange**. (θ reste faible)



Energie cinétique

$$T = \tfrac{1}{2} J_o \dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

Energie potentielle

$$V = mgh + \tfrac{1}{2} k x^2$$

$$h = l(1-\cos\theta)$$

$$x = a\sin\theta$$

Approximation pour θ faible

$$(1-\cos\theta) \approx \tfrac{\theta^2}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta \approx \theta$$

$$V = \tfrac{1}{2} mgl\theta^2 + \tfrac{1}{2} k a^2 \theta^2$$

Les équations de Lagrange

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \tfrac{\partial T}{\partial q_i} + \tfrac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$$

Ici nous n'avons qu'un seul degré de liberté $(i=1)$ $\quad \Rightarrow q_1 = \theta$

Le système est libre $\quad \Rightarrow Q_1 = 0$

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \tfrac{\partial T}{\partial \theta} + \tfrac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\tfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \tfrac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2\right) = \tfrac{1}{2} m l^2 \left(2\dot{\theta}\right) = m l^2 \dot{\theta}$$

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \tfrac{d}{dt}(m l^2 \dot{\theta}) = m l^2 \ddot{\theta}$$

$$\tfrac{\partial T}{\partial \theta} = \tfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2\right) = 0$$

$$\tfrac{\partial V}{\partial \theta} = \tfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\tfrac{1}{2} mgl\theta^2 + \tfrac{1}{2} k a^2 \theta^2\right) = mgl\theta + k a^2 \theta$$

On obtient l'équation de mouvement

$$m l^2 \ddot{\theta} + \left(mgl + k a^2\right)\theta = 0$$

La pulsation propre est :

$$\omega = \sqrt{\frac{(mgl+ka^2)}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \left(\frac{a}{l}\right)^2 \frac{k}{m}}$$

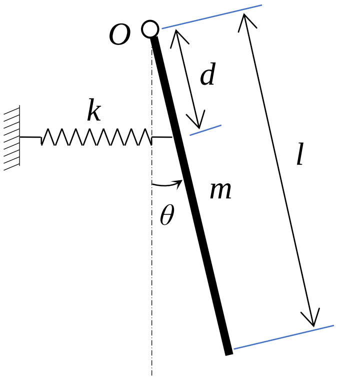
BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 2

Un pendule composé d'une barre de longueur l et de masse m comporte un ressort de constante de raideur k qui lui est connecté, à une distance d au-dessous de son point de suspension.

Trouver la pulsation propre de vibration en utilisant la méthode de **Lagrange**. (θ reste faible)

On donne le moment d'inertie massique d'une barre par rapport à un axe passant par une extrémité $J_O = \frac{1}{3}ml^2$.



Energie cinétique

$$T = \tfrac{1}{2} J_o \dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2$$

Energie potentielle

$$V = mgh + \tfrac{1}{2} k x^2$$

$$h = \frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$x = d\sin\theta$$

Approximation pour θ faible

$$(1-\cos\theta) \approx \tfrac{\theta^2}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta \approx \theta$$

$$V = \tfrac{1}{4} mgl\theta^2 + \tfrac{1}{2} kd^2\theta^2$$

Les équations de Lagrange

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \tfrac{\partial T}{\partial q_i} + \tfrac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$$

Ici nous n'avons qu'un seul degré de liberté $(i=1)$ $\Rightarrow q_1 = \theta$

Le système est libre $\Rightarrow Q_1 = 0$

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \tfrac{\partial T}{\partial \theta} + \tfrac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\tfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \tfrac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left(\tfrac{1}{6} ml^2\dot{\theta}^2\right) = \tfrac{1}{6} ml^2\left(2\dot{\theta}\right) = \tfrac{1}{3} ml^2\dot{\theta}$$

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{3} ml^2\dot{\theta}\right) = \tfrac{1}{3} ml^2\ddot{\theta}$$

$$\tfrac{\partial T}{\partial \theta} = \tfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\tfrac{1}{6} ml^2\dot{\theta}^2\right) = 0$$

$$\tfrac{\partial V}{\partial \theta} = \tfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\tfrac{1}{4} mgl\theta^2 + \tfrac{1}{2} kd^2\theta^2\right) = \tfrac{1}{2} mgl\theta + kd^2\theta$$

On obtient l'équation de mouvement

$$\tfrac{1}{3} ml^2\ddot{\theta} + \left(\tfrac{1}{2} mgl + kd^2\right)\theta = 0$$

La pulsation propre est :

$$\omega = \sqrt{\frac{3\left(\frac{1}{2}mgl + kd^2\right)}{ml^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3k}{m}\left(\frac{d}{l}\right)^2}$$

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 3

Une tige rigide homogène de longueur $L = 30\ cm$ et de masse $m = 150\ g$ oscille autour d'un axe de rotation passant par l'une de ses extrémités. La vitesse angulaire de la tige en passant par la position d'équilibre est de 0,35 rad/s.

Rappel : *Le centre de gravité d'une tige homogène est en son centre géométrique. Le moment d'inertie d'une tige par rapport à un axe de rotation passant par son centre de gravité est* $I_G = \frac{1}{12} mL^2$.

a) Quelle est le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation ?
b) Quelle est la pulsation du pendule ?
c) Quelle est l'amplitude angulaire des oscillations ?

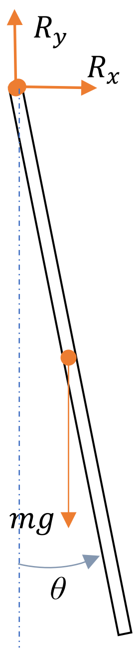
a) Moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation

$$I_O = I_G + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_O = \frac{1}{12} mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_O = \frac{1}{3} mL^2$$

Application numérique $I_O = \frac{1}{3}\ 0{,}150(0{,}30)^2 = 0{,}0045\ \text{kg m}^2$



b) La pulsation propre du pendule

Application du théorème du moment cinétique

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{p}}/_o = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{p}}/_o = OG \times mg\sin(\overrightarrow{OG}, \vec{g})$$

$$\mathcal{M}_{\vec{p}}/_o = -\frac{L}{2} mg\sin\theta$$

$$\sum \mathcal{M}/_o = I_O\alpha$$

$$-\frac{L}{2} mg\sin\theta = \frac{1}{3} mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{1}{3} mL^2\ddot{\theta} + \frac{L}{2} mg\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2}\frac{g}{L}\theta = 0$$

$\omega_n = \sqrt{\frac{3\ g}{2\ L}}$; Application numérique $\omega_n = \sqrt{\frac{3*9{,}8}{2*0{,}30}} = 7\ rad/s$

BOUTCHICHA
Djilali

c) L'amplitude maximale des oscillations

La vitesse de passage par la position d'équilibre est la vitesse maximale

$\dot{\theta}_{max} = 0{,}35\ rad/s$

L'expression de vitesse maximale

$\dot{\theta}_{max} = \theta_{max}\omega_n$

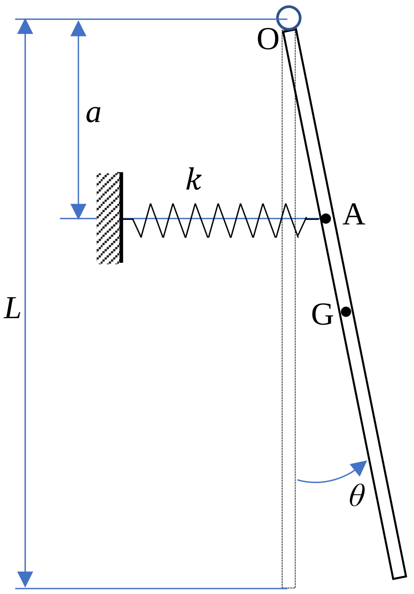
$\theta_{max} = \dot{\theta}_{max}/\omega_n$

Application numérique ; $\theta_{max} = \frac{0{,}35}{7} = 0{,}5\ rad$

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 4

Déterminer la fréquence naturelle du pendule composé d'une tige de masse m et de longueur L, retenu au point A par un ressort de raideur k et cela pour de faibles angles d'oscillation.



On applique la 2eme loi de Newton des moments autour du point d'articulation O.

$$\sum \mathcal{M}_{/O} = I_0\ \alpha$$

avec

$$I_O = I_G + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\, mL^2 + \frac{1}{4} mL^2 = \frac{1}{3}\, mL^2$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{fr/_O}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{f_r}$$

$$(\mathcal{M}_{fr/_O}) = -a\,.\,kx\,.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -a.kx.\cos\theta$$

$$\overrightarrow{(\mathcal{M}_{P/_O})} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{mg}$$

$$(\mathcal{M}_{P/_O}) = -\frac{l}{2} mg.\sin\theta$$

(Les moments des forces de réactions R_X et R_Y autour de O sont nuls.)

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = -akx\cos\theta) - mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

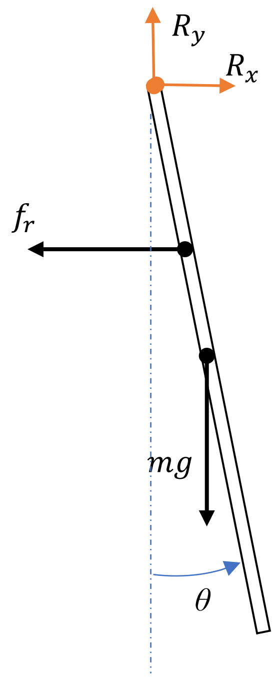


Diagramme du corps libre du pendule

Pour de faibles amplitudes de vibration, on utilise les approximations : $\sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta \approx 1$ et $x \approx s = a\theta$

Ce qui donne :

$$\frac{1}{3}m\,L^2\,\ddot{\theta} + \left(ka^2 + \frac{mgL}{2}\right)\theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\left(ka^2 + \frac{mgL}{2}\right)}{\frac{1}{3}m\,l^2}}$$

La fréquence naturelle est

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{2ka^2 + mgL}{m\,l^2}}$$

Formalisme de Lagrange

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2$$

Avec $I_o = \frac{1}{3}mL^2$

$$T = \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2$$

L'energie potentielle

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + mgh$$

Avec $x = a\sin\theta$ et $h = \frac{L}{2}(1-\cos\theta)$

Pour l'amplitude faible $\sin\theta \approx \theta$ et $1-\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$

$$V = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 + mg\frac{L}{2}\frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{2}\left(ka^2 + \frac{L}{2}mg\right)\theta^2$$

Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} + \frac{\partial V}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}$$

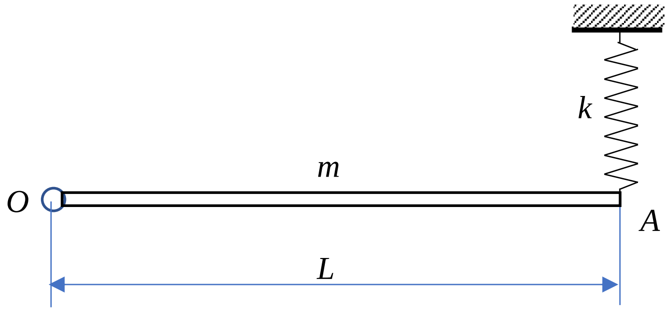
$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = \left(ka^2 + \frac{L}{2}mg\right)\theta$$

$$\frac{1}{3}\mathrm{m}\mathrm{L}^2\ddot{\theta} + \left(\mathrm{ka}^2 + \frac{\mathrm{mgL}}{2}\right)\theta = 0$$

Exercice 5

Déterminer l'équation du mouvement de la barre horizontale en fonction de l'angle de rotation autour de l'extrémité O.



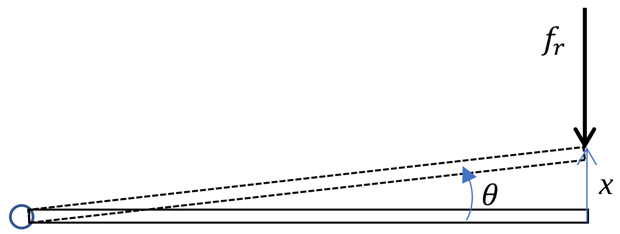


Diagramme du corps libre de la barre

En équilibre statique, on a :

$$\sum \mathcal{M}_{/O} = 0 = 0 - mg\left(\frac{L}{2}\right) + kx_0 L$$

Où x_0 est le déplacement statique.

Après un déplacement avec un faible angle,

$(\sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta \approx 1 \text{ et } x \approx s = L\theta - x_0)$

$$\sum \mathcal{M}_{/O} = I_0\ \alpha$$

$$-mg\left(\frac{L}{2}\right) - k(L\theta - x_0)L = \frac{1}{3}m\,L^2\,\ddot{\theta}$$

$$\frac{1}{3}m\,L^2\,\ddot{\theta} + k(L\theta)L = 0$$

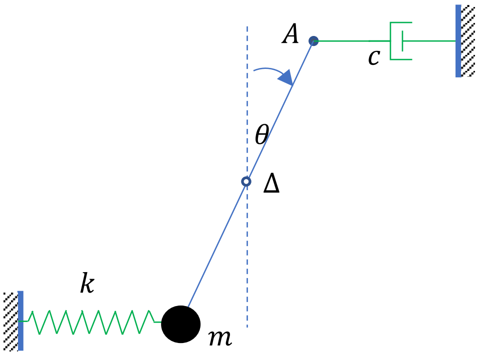
$$\ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

D'où la pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 6



On considère le système mécanique ci-contre constitué d'une tige de longueur L et de masse négligeable pouvant tourner dans un plan vertical autour de son axe fixe Δ .

Le point A est relié à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux c . A l'autre extrémité de la tige est fixée une masse ponctuelle m qui est reliée à un second bâti fixe par un ressort de raideur k.

On se place dans le cas des oscillations libres de faible amplitude.

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement satisfaite par θ.

b) Lorsque le système est abandonné sans vitesse initiale, il effectue des oscillations amorties de période $T_d = 0.1\ s$, dont l'amplitude diminue de moitié au bout de 5 périodes. Calculer le coefficient d'amortissement c sachant que $m = 0.5\ kg$.

Solution :

L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m\dot{s}^2$$

Avec $\left(s = \frac{L}{2}\theta \Longrightarrow \dot{s} = \frac{L}{2}\dot{\theta}\right)$

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2$$

Avec $I_\Delta = m\left(\frac{L}{2}\right)^2$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \dot{\theta}^2$$

L'energie potentielle

$$V = \frac{1}{2} kx^2 + mgh$$

Avec $x = \frac{L}{2}\sin\theta$ et $h = \frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$

Pour l'amplitude faible $\sin\theta \approx \theta$ et $1 - \cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$

$$V = \frac{1}{2} k \left(\frac{L}{2}\theta\right)^2 + mg\frac{L}{2}\frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\left(k\frac{L}{2} + mg\right)\theta^2$$

La fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} c \left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2$$

L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

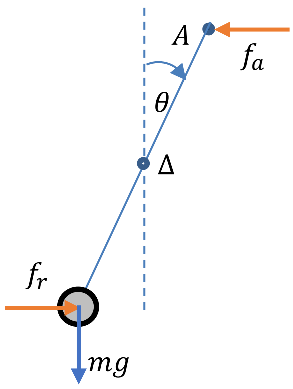
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{L}{2}\left(k\frac{L}{2} + mg\right)\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = c\left(\frac{L}{2}\right)^2 \dot{\theta}$$

$$m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \ddot{\theta} + c\left(\frac{L}{2}\right)^2 \dot{\theta} + \frac{L}{2}\left(k\frac{L}{2} + mg\right)\theta$$

Diagramme du corps libre

Application du théorème cinétique



$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta} = I_\Delta \ddot{\theta}$$

$$-f_r \times \frac{l}{2} - f_a \times \frac{l}{2} - mg\frac{l}{2}\sin\theta = I_\Delta \ddot{\theta}$$

$$f_r = k\frac{l}{2}\sin\theta = k\frac{l}{2}\theta$$

$$f_a = c\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right) = c\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta = c\frac{l}{2}\dot{\theta}$$

$$I_\Delta = m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \ddot{\theta} + c\frac{l}{2}\dot{\theta} \times \frac{l}{2} + k\frac{l}{2}\frac{l}{2}\theta + mg\frac{l}{2}\theta = 0$$

Equation de mouvement

$$ml\ddot{\theta} + cl\dot{\theta} + (kl + 2mg)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{k}{m} + \frac{2g}{l}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

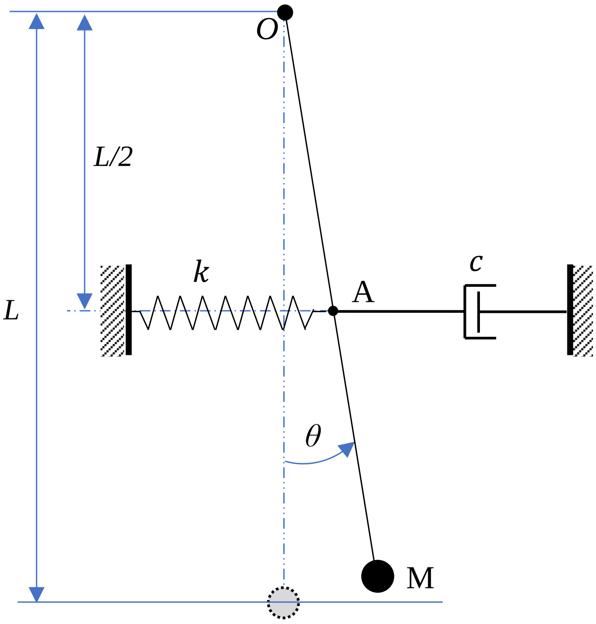
Avec $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2g}{l}}$ et $2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$

Décrément logarithmique

$$\delta = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}\frac{x_0}{x_n} = \frac{1}{5}\mathrm{Ln}\,2$$

Exercice 7

Le système ci-contre est composé d'un pendule simple de longueur $L = 0.6\ m$ et de masse $M = 1\ kg$. Ce pendule est relié en son milieu à un ressort de raideur $k = 4\ N/m$ d'un côté et à un amortisseur de coefficient d'amortissement $c = 0.6\ Ns/m$ de l'autre. (*On se met dans le cas de faibles angles*)



1. Determiner l'équation de mouvement.
2. Calculer la pulsation, le facteur d'amortissement et la pseudo pulsation.
3. Ecrire la réponse du système si le pendule est lancé à partir de sa position d'équilibre avec une vitesse angulaire de 0.35 rad/s.
4. On change d'amortisseur et on effectue un test vibratoire, on constate que l'amplitude du mouvement décroit à 75 % de sa valeur initiale après six (6) cycles. Calculer le décrément logarithmique δ et les nouvelles valeurs de ξ et c.

Solution

L'équation de mouvement de la masse

- On applique la loi de la dynamique

$$I_0\ddot{\theta} = \sum M_{/o}$$

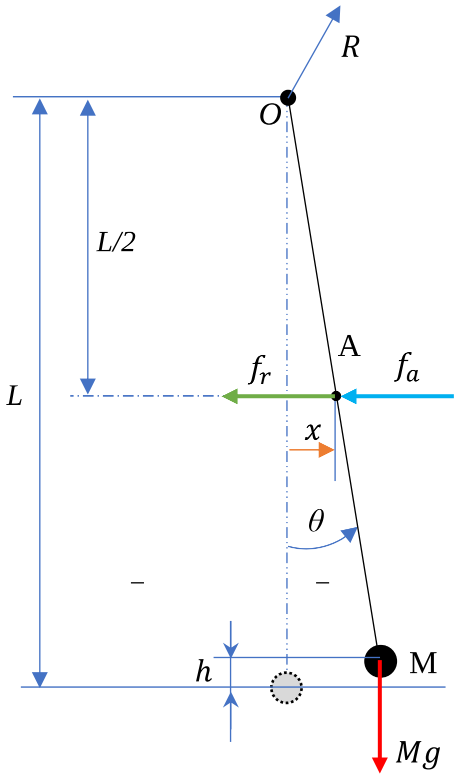
$$I_0\ddot{\theta} = -f_r\frac{L}{2}\cos\theta - f_a\frac{L}{2}\cos\theta - MgL\sin\theta$$

- On relie les forces aux variables

$$x = \frac{L}{2}\sin\theta \qquad \text{et} \quad \dot{x} = \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$f_r = kx = k\frac{L}{2}\theta$$

$$f_a = c\dot{x} = c\frac{L}{2}\dot{\theta}$$



$$I_0\ddot{\theta} = -k\frac{L}{2}\sin\theta\frac{L}{2}\cos\theta - c\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\frac{L}{2}\cos\theta - MgL\sin\theta$$

pour θ faible $\sin\theta \approx \theta \quad et \quad \cos\theta \approx 1$

- On réarrange

BOUTCHICHA
Djilali

$$ML^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}cL^2\dot{\theta} + \left(\frac{1}{4}kL^2 + MgL\right)\theta = 0$$

L'équation de mouvement

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{c}{4M}\dot{\theta} + \left(\frac{k}{4M} + \frac{g}{L}\right)\theta = 0}$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

La pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{4M} + \frac{g}{L}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4}{4*1} + \frac{9.8}{0.6}} = 4.165\ rad/s$$

Le facteur d'amortissement

$$2\xi\omega_n = \frac{c}{4M}$$

$$\xi = \frac{c}{8M\omega_n}$$

$$\xi = \frac{0.6}{8*1*4.165} = 0.018 < 1$$

La pseudo pulsation

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_d = 4.165\sqrt{1-(0.018)^2} = 4.152\ rad/s$$

$$\theta(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t)$$

Conditions initiales

$$\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = 0.35\ rad/s$$

$$e^0(A_1\cos 0 + A_2\sin 0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_1 = 0$$

$$\theta(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_2\sin\omega_d t)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}(A_2\sin\omega_d t) + e^{-\xi\omega_n t}(A_2\omega_d\cos\omega_d t)$$

$$\dot{\theta}(t) = e^{-\xi\omega_n t}[A_2\omega_d\cos\omega_d t - \xi\omega_n A_2\sin\omega_d t]$$

$$e^0[A_2\omega_d\cos 0 - \xi\omega_n A_2\sin 0] = \dot{\theta}_0 \quad \Longrightarrow \quad A_2 = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_d} = \frac{0.35}{4.152} = 0.0843\ rad$$

BOUTCHICHA
Djilali

$\xi\omega_n = 0.018 * 4.165 = 0.75$

$$\boxed{\theta(t) = e^{-0.75t}(0.0843 \sin 4.152t)}$$

Apres le test vibratoire

Le décrément logarithmique

$$\delta = \frac{1}{n} ln \frac{\theta_0}{\theta_n}$$

$$\delta = \frac{1}{6} ln \frac{\theta_0}{0.75 * \theta_0} = \frac{1}{6} ln \frac{1}{0.75} = 4.7947 \times 10^{-2}$$

Facteur d'amortissement

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.048}{\sqrt{4\pi^2 + 0.048^2}} = 7.6308 \times 10^{-3}$$

Coefficient d'amortissement

$$2\xi\omega_n = \frac{c}{4M}$$

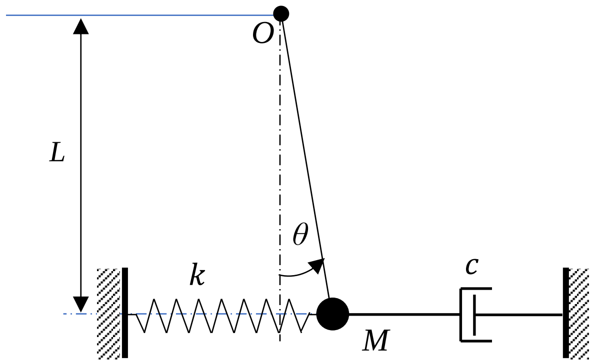
$$c = 8M\xi\omega_n$$

$$c = 8 \times 1 \times 7.631 \times 10^{-3} \times 4.165 = 0.24\ Ns/m.$$

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 8

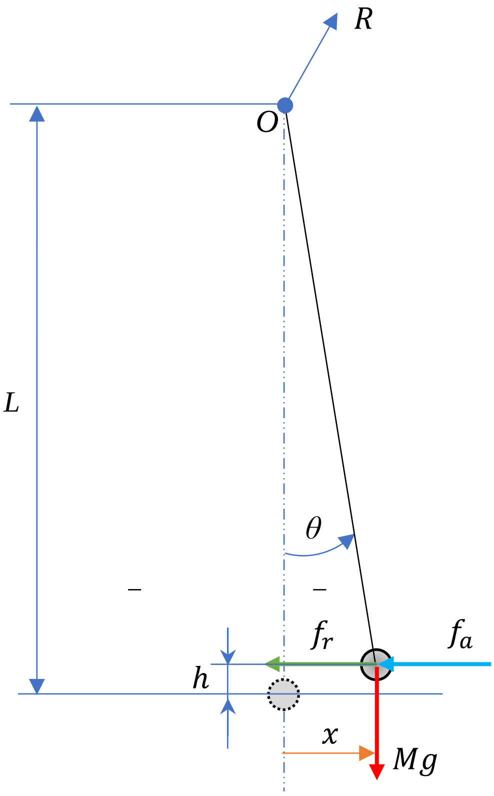
Le système ci-contre est composé d'un pendule simple de longueur $L = 0.4\ m$ et de masse $M = 0.8\ kg$. Ce pendule est relié en son extrémité à un ressort de raideur $k = 5\ N/m$ d'un côté et à un amortisseur de coefficient d'amortissement $c = 0.6\ Ns/m$ de l'autre. (*On se met dans le cas de faibles angles*)



1. Determiner l'équation de mouvement.
2. Calculer la pulsation, le facteur d'amortissement et la pseudo pulsation.
3. Ecrire la réponse du système si le pendule est lancé à partir de sa position d'équilibre avec une vitesse angulaire de 0.3 rad/s.
4. On change d'amortisseur et on effectue un test vibratoire, on constate que l'amplitude du mouvement décroit à 80 % de sa valeur initiale après dix (10) cycles. Calculer le décrément logarithmique δ et les nouvelles valeurs de ξ et c.

Solution

1. L'équation de mouvement



- On applique la loi de la dynamique

$$I_0\ddot{\theta} = \sum M_{/o}$$

$$I_0\ddot{\theta} = -f_r L\cos\theta - f_a L\cos\theta - MgL\sin\theta$$

- On relie les forces aux variables

$x = L\sin\theta$ et $\dot{x} = L\dot{\theta}\cos\theta$

$$f_r = kx = kL\sin\theta$$

$$f_a = c\dot{x} = cL\dot{\theta}\cos\theta$$

$$I_0\ddot{\theta} = -kL\sin\theta\, L\cos\theta - cL\dot{\theta}\cos\theta\, L\cos\theta - MgL\sin\theta$$

pour θ faible $\sin\theta \approx \theta$ *et* $\cos\theta \approx 1$

- On réarrange

$$ML^2\ddot{\theta} + cL^2\dot{\theta} + (kL^2 + MgL)\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{c}{M}\dot{\theta} + \left(\frac{k}{M} + \frac{g}{L}\right)\theta = 0}$$

2. L'équation de mouvement

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

La pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M} + \frac{g}{L}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{5}{0.8} + \frac{9.8}{0.4}} = 5.5453\ rad/s$$

Le facteur d'amortissement

$$2\xi\omega_n = \frac{c}{M}$$

$$\xi = \frac{c}{2M\omega_n}$$

$$\xi = \frac{0.6}{2 * 0.8 * 5.5453} = 6.7625 \times 10^{-2} < 1$$

La pseudo pulsation

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\omega_d = 5.4314\sqrt{1 - (0.06976)^2} = 5.42\ rad/s$$

$$\theta(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)$$

3. Conditions initiales (réponse libre)

$\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = 0.3\ rad/s$

$$e^0(A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_1 = 0$$

$$\theta(t) = e^{-\xi\omega_n t}(A_2 \sin\omega_d t)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t}(A_2 \sin\omega_d t) + e^{-\xi\omega_n t}(A_2\omega_d \cos\omega_d t)$$

$$\dot{\theta}(t) = e^{-\xi\omega_n t}[A_2\omega_d \cos\omega_d t - \xi\omega_n A_2 \sin\omega_d t]$$

$$e^0[A_2\omega_d \cos 0 - \xi\omega_n A_2 \sin 0] = \dot{\theta}_0 \quad \Longrightarrow \quad A_2 = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_d} = \frac{0.30}{5.42} = 0.055361\ rad$$

$$\xi\omega_n = 6.7625 \times 10^{-2} * 5.5453 = 0.375$$

$$\boxed{\theta(t) = e^{-0.375t}(0.0554 \sin 5.42t)}$$

4. Apres le test vibratoire (nouvelles valeurs)

Le décrément logarithmique

$$\delta = \frac{1}{n} ln \frac{\theta_0}{\theta_n}$$

$$\delta = \frac{1}{10} ln \frac{\theta_0}{0.80 * \theta_0} = \frac{1}{10} ln \frac{1}{0.80} = 2.2314 \times 10^{-2}$$

Facteur d'amortissement

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.022314}{\sqrt{4\pi^2 + 0.022314^2}} = 3.5514 \times 10^{-3}$$

Coefficient d'amortissement

$$2\xi\omega_n = \frac{c}{M}$$

$$c = 2M\xi\omega_n$$

$$c = 2 \times 0.8 \times 3.5514 \times 10^{-3} \times 5.5453 = 0.0315\ Ns/m.$$