BOUTCHICHA
Djilali

# Vibration libre d'un système à un degré de liberté

Le système le plus fondamental pour l'étude des vibrations est le système à un seul degré de liberté. Par définition, un système à un seul degré de liberté est un système pour lequel une seule coordonnée indépendante est nécessaire pour décrire complètement le mouvement du système. De nombreux systèmes complexes peuvent être représentés de manière adéquate par un système équivalent à un seul degré de liberté. En outre, sous un certain type de transformation, le mouvement de systèmes discrets à plusieurs degrés de liberté et de systèmes continus peut être décomposé en mouvement d'une série de systèmes indépendants à un seul degré de liberté. Ainsi, le comportement des systèmes à un seul degré de liberté présente un intérêt dans ce contexte ainsi qu'en lui-même.
De nombreux systèmes mécaniques peuvent être représentés comme des systèmes équivalents à un système à un seul degré de liberté.
L'équation différentielle de mouvement est donnée par :

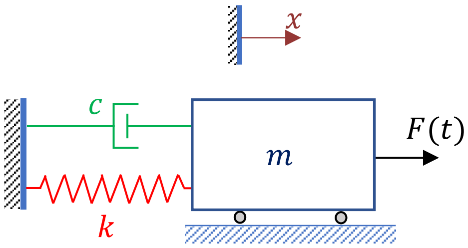


**Figure 2.1 -** Système masse-ressort-amortisseur

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \tag{2.1}$$

**Vibration libre non amorti**

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.2}$$

En divisant par m, on obtient l'équation gouvernante

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{2.3}$$

où

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.4}$$

L'équation (2.3) est connue sous le nom d'équation harmonique et le paramètre $\omega_n$ est appelé *fréquence naturelle circulaire* ou *pulsation propre*. On voit que la pulsation propre définit le système non amorti en ce sens que tous les paramètres qui caractérisent le système sont contenus dans le seul paramètre $\omega_n$. Ainsi, les systèmes ayant le même rapport rigidité / masse répondront de la même manière à un ensemble donné de conditions initiales. La signification physique et l'importance de la fréquence naturelle du système seront établies une fois que nous déterminerons la réponse du système. En tant que solution de l'Eq. (2.3) donnera le mouvement du système en fonction du temps, nous déterminerons ensuite cette solution.

BOUTCHICHA
Djilali

Supposons que la masse soit éloignée d'une certaine distance de sa position d'équilibre et ensuite relâchée à une vitesse donnée. Nous souhaitons obtenir la solution de mouvement en fonction des conditions initiales. Pour ce faire, supposons une solution de la forme

$$x(t) = Ce^{st} \tag{2.5}$$

où $e$ est la fonction exponentielle, et les paramètres $C$ et $s$ sont des constantes qui restent à déterminer.

$$x(t) = Ce^{st} \Longrightarrow \dot{x}(t) = Cse^{st} \quad \Longrightarrow \ddot{x}(t) = Cs^2e^{st}$$

Lors de la substitution dans l'équation de mouvement nous avons que

$$(s^2 + {\omega_n}^2)Ce^{st} = 0 \tag{2.6}$$

Une solution évidente est $C = 0$, ce qui donne $x(t) \equiv 0$ (la solution triviale). Cela correspond à la configuration d'équilibre, où la masse ne bouge pas. Cette solution nous est bien entendu inintéressante car nous sommes concernés par la réponse dynamique du système. Pour les solutions non triviales [$x(t) \neq 0$ identiquement], il faut que $C \neq 0$. Si tel est le cas, alors le terme entre parenthèses dans l'équation. (2.6) doit être nul. En définissant l'expression entre parenthèses à zéro et en résolvant $s$, nous obtenons

$$s = \mp i\omega_n \tag{2.7}$$

où $i = \sqrt{-1}$. L'équation (2.6) suggère deux valeurs du paramètre $s$, et donc deux solutions de la forme de l'équation. (2.5), qui satisfont l'équation. (2,3). Depuis Eq. (2.3) est une équation différentielle linéaire, une combinaison linéaire de ces solutions est également une solution. Ainsi, la solution générale à Eq. (2.3) est donné par

$$x(t) = C_1e^{i\omega_n t} + C_2e^{-i\omega_n t} \tag{2.8}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes complexes.
On rappelle la formule d'Euler

$$e^{\mp i\omega_n t} = \cos\omega_n t \mp i\sin\omega_n t \tag{2.9}$$

Alors que Eq. (2.8) est une forme de la solution générale de l'équation. (2.3), la solution peut être écrite sous des formes alternatives qui se prêtent à une interprétation physique. Si nous appliquons la formule d'Euler Eq. (2.9), à Eq. (2.8) on constate que la solution peut être exprimée sous la forme alternative

$$x(t) = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t \tag{2.10}$$

où

$$A_1 = C_1 + C_2 \text{ et } A_2 = i(C_1 - C_2) \tag{2.11}$$

$A_1$et $A_2$ sont des constantes réelles. Définissons encore deux constantes supplémentaires, $A$ et $\phi$, telles que

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad et \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \tag{2.12}$$

$$A_1 = A\cos\phi \quad et \;\; A_1 = A\sin\phi \tag{2.13}$$

Utilisant la formule trigonométrique

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{2.14}$$

$$A\cos\phi\cos\omega_n t + A\sin\phi\sin\omega_n t = A\cos(\omega_n t - \phi) \tag{2.15}$$

On obtient ainsi une forme alternative, physiquement interprétable, de la solution donnée par

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) \tag{2.16}$$

ou, en utilisant $\varphi = -\phi$

$$x(t) = A\cos(\omega_n t + \varphi) \tag{2.17}$$

La constante $A$ est appelée amplitude de l'oscillation et la constante $\varphi$ est appelée angle de phase. La raison de cette terminologie deviendra bientôt évidente. Les équations (2.8), (2.10) et (2.17) sont des formes différentes de la même solution. Chacun a sa place. La dernière forme, Eq. (2.17), permet l'interprétation physique la plus directe. Les constantes d'intégration sont évaluées en imposant les conditions initiales.

Le système est mis en mouvement en déplaçant la masse et en la relâchant à un moment donné. Nous prendrons l'instant de libération comme notre temps de référence, $t = 0$. Ainsi, si à l'instant de libération la masse est à la position $x_0$ et se déplace à la vitesse $v_0$, les conditions initiales peuvent être formellement énoncées comme

$$x(0) = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = v(0) = v_0 \tag{2.18}$$

Imposition des conditions initiales, Eq. (2.18), sur la solution donnée par l'Eq. (2,10) donne

$$\begin{cases} x(0) = A_1\cos 0 + A_2 \sin 0 = x_0 \Longrightarrow A_1 = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\omega_n A_1 \sin 0 + \omega_n A_2 \cos 0 = v_0 \Longrightarrow A_2 = \dfrac{v_0}{\omega_n} \end{cases} \tag{2.19}$$

Il découle des équations. (2.10) et (2.19) que la réponse est donnée par

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n}\sin \omega_n t \tag{2.20}$$

La réponse est également donnée par la forme équivalente

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) \;\; ou \;\; x(t) = A\cos(\omega_n t + \varphi) \tag{2.21}$$

où

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \;\; et \;\; \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\omega_n x_0}\right) \quad \text{ou} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{\omega_n x_0}\right) \tag{2.22}$$

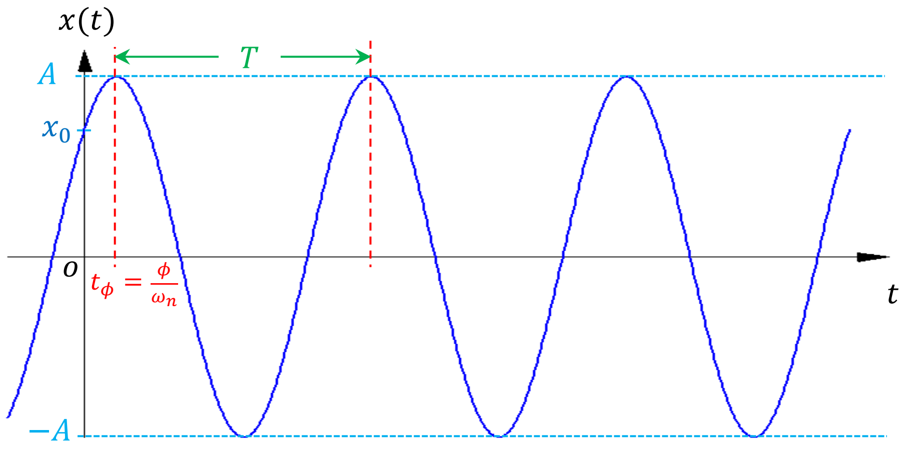


**Figure 2.2** – Réponse temporelle d'un système non amorti

BOUTCHICHA
Djilali

## Vibration libre avec amortissement visqueux

L'équation de mouvement

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.23}$$

Pour résoudre cette équation, nous supposons que la solution est de la forme

$$x(t) = Ce^{st} \tag{2.24}$$

où $C$ et $s$ sont des constantes indéterminées. En insérant cette fonction dans l'équation de mouvement, nous obtenons l'équation caractéristique

$$ms^2 + cs + k = 0 \tag{2.25}$$

les racines de celle-là sont

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)} \tag{2.26}$$

Ces racines donnent deux solutions

$$x_1(t) = C_1e^{s_1t} \;\text{ et }\; x_2(t) = C_2e^{s_2t} \tag{2.27}$$

Ainsi la solution générale est donnée par une combinaison de ces deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t} \\ &= C_1e^{\left\{-\frac{c}{2m}+\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)}\right\}t}+C_2e^{\left\{-\frac{c}{2m}-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)}\right\}t} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes arbitraires qui se déterminent à partir des conditions initiales.

### *Amortissement critique*

L'amortissement critique $c_c$ est défini comme la valeur du coefficient d'amortissement $c$ pour lequel le discriminant est nul

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right) = 0 \tag{2.29}$$

ou bien

$$c_c = 2m\sqrt{k/m} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \tag{2.30}$$

### *Facteur d'amortissement*

Pour n'importe quel système amorti, le facteur d'amortissement est défini comme le rapport du coefficient d'amortissement sur l'amortissement critique

$$\xi = \frac{c}{c_c} \tag{2.31}$$

nous pouvons écrire

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c}.\frac{c_c}{2m} = \xi\omega_n \tag{2.32}$$

et ainsi

$$\ddot{x} + 2\left(\frac{c}{2m}\right)\dot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \tag{2.33}$$

soit

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{2.34}$$

et

$$s_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n \tag{2.35}$$

**1er cas :** *système sous amorti* ($\xi < 1 \quad ou \quad c < c_c \quad ou \quad c/2m < \sqrt{k/m}$). Pour cette condition, $(\xi^2 - 1)$ est négative et les racines $s_1$ et $s_2$ peuvent être exprimées comme :

$$\begin{aligned} s_1 &= \left(-\xi\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) \\ s_1 &= \left(-\xi\omega_n - i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Posons

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \tag{2.37}$$

$\omega_d$ est la pulsation de vibration amortie ou pseudo-pulsation.
La solution peut être écrite sous différentes formes :

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(-\xi\omega_n + i\omega_d)t} + C_2 e^{(-\xi\omega_n - i\omega_d)t} \\ &= e^{-\xi\omega_n t}\left\{C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}\right\} \\ &= e^{-\xi\omega_n t}\{(C_1 + C_2)\cos\omega_d t + i(C_1 - C_2)\sin\omega_d t\} \\ &= e^{-\xi\omega_n t}\{A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t\} \\ &= Ae^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t + \varphi) \end{aligned} \tag{2.38}$$

où $(C_1, C_2)$, $(A_1, A_2)$ et $(A, \varphi)$ sont des constantes arbitraires qui se déterminent à partir des conditions initiales.
Pour les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, on calcule $A_1$ et $A_2$ :

$$A_1 = x_0 \text{ et } A_2 = \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \tag{2.39}$$

La solution devient ainsi

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{x_0\cos\omega_d t + \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right\} \tag{2.40}$$

Les constantes $(A, \varphi)$ seront exprimées :

$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \mathrm{tg}^{-1}(-A_2/A_1) \tag{2.41}$$

**2er cas :** *amortissement critique* ($\xi = 1 \quad ou \quad c = c_c \quad ou \quad c/2m = \sqrt{k/m}$). Pour cette condition, les racines $s_1$ et $s_2$ sont égales :

$$s_1 = s_2 = -\omega_n \tag{2.42}$$

La solution est donnée par

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \tag{2.43}$$

L'application des conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, on calcule $C_1$ et $C_2$

$$C_1 = x_0 \text{ et } C_2 = v_0 + \omega_n x_0 \qquad 2.44$$

La solution devient

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t]e^{-\omega_n t} \qquad 2.45$$

On peut voir que le mouvement est apériodique (c-à-d. non-périodique).

**3^er cas :** *système sur amorti* ($\xi > 1 \;\; ou \;\; c > c_c \;\; ou \;\; c/2m > \sqrt{k/m}$). Comme $(\xi^2 - 1)$ est positive et les racines $s_1$ et $s_2$ sont réelles et distinctes et peuvent être exprimées comme :

$$s_1 = \left(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right) > 0 \qquad 2.46$$

$$s_2 = \left(-\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\right) < 0 \qquad 2.47$$

Posons

$$\omega^* = \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \qquad 2.48$$

La solution peut être écrite sous différentes formes :

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(-\xi\omega_n + \omega^*)t} + C_2 e^{(-\xi\omega_n - \omega^*)t} \\ &= e^{-\xi\omega_n t}\{C_1 e^{\omega^* t} + C_2 e^{-\omega^* t}\} \qquad 2.49 \\ &= e^{-\xi\omega_n t}\{A_1 \cosh \omega^* t + A_2 \sinh \omega^* t\} \end{aligned}$$

Pour les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, on calcule $A_1$ et $A_2$ :

$$A_1 = x_0 \text{ et } A_2 = \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega^*} \qquad 2.50$$

La solution devient ainsi

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left\{x_0 \cosh \omega^* t + \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega^*} \sinh \omega^* t\right\} \qquad 2.51$$

**Comparaison entre les trois cas d'amortissement**

$\omega_n = 10\, rad/s\,;\;\; x_0 = 10\, cm\,;\;\; v_0 = 100\, cm/s\,.$

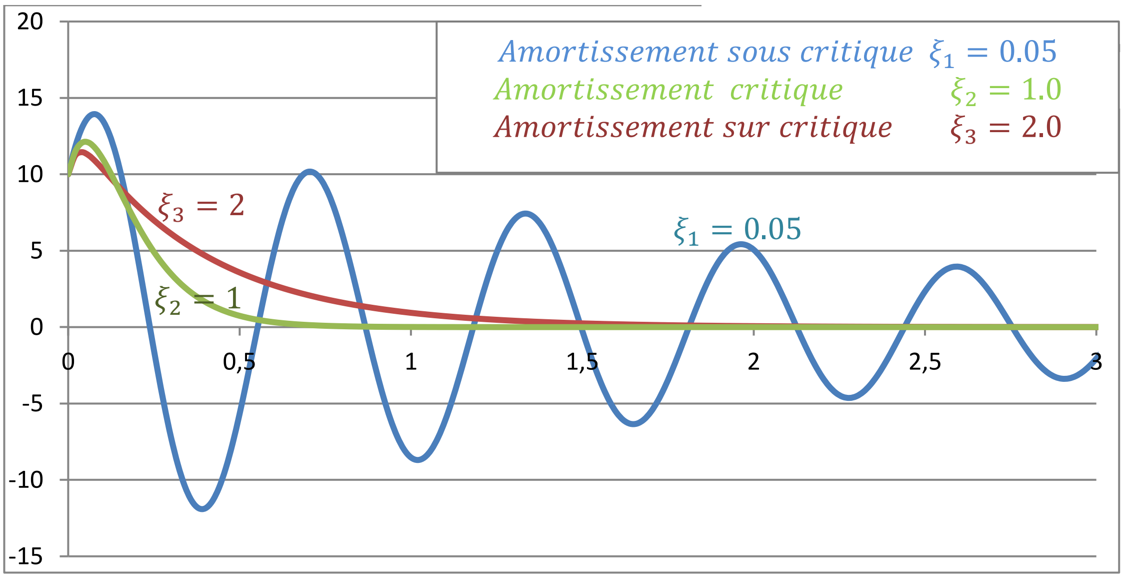


**Figure 2.3 -** Comparaison entre les trois cas d'amortissement

BOUTCHICHA
Djilali

**Décrément logarithmique (mesure de $\xi$)**

Supposons que nous ayons un système sous-amorti ($\xi^2 < 1$) et que nous souhaitions mesurer le coefficient d'amortissement, $\xi$. Comment pourrions-nous y parvenir ? Imaginons que nous déplaçons la masse de la figure (2.1) d'une distance initiale, la relâchons, puis tracent une trace du mouvement qui s'ensuit comme illustré sur la figure ci-dessous. Considérons les déplacements mesurés à deux instants dans le temps se produisant à une période d'intervalle, disons à deux pics consécutifs, comme indiqué sur la figure (2.4). Soit le déplacement au temps $t = t_1$ noté $x(t_1) = x_1$, et le déplacement mesuré à $t = t_2$ noté $x(t_2) = x_2$. Il découle de l'Eq. (2.38) que les déplacements à ces instants sont donnés par

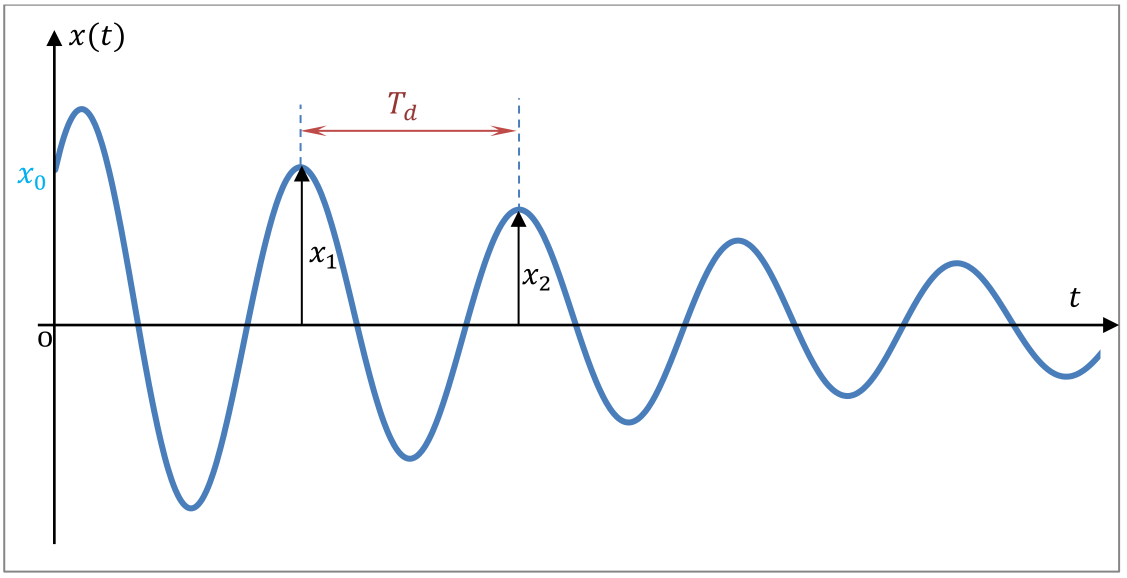


**Figure 2.4 -** Réponse caractéristique d'un système sous-amorti

$$\begin{aligned} x_1 &= Ae^{-\xi\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 + \varphi) \\ x_2 &= Ae^{-\xi\omega_n t_2}\cos(\omega_d t_2 + \varphi) \end{aligned} \qquad 2.52$$

Puisque les mesures sont prises à des moments séparés par une période, nous avons la relation

$$t_2 = t_1 + T_d \qquad 2.53$$

Il s'ensuit alors que

$$\cos(\omega_d t_2 + \varphi) = \cos\{\omega_d(t_1 + T_d) + \varphi\} = \cos(\omega_d t_1 + \varphi) \qquad 2.54$$

Prenons ensuite le rapport des déplacements mesurés à une période d'intervalle. Cela donne

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^{-\xi\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 + \varphi)}{Ae^{-\xi\omega_n t_2}\cos(\omega_d t_2 + \varphi)} = \frac{Ae^{-\xi\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 + \varphi)}{Ae^{-\xi\omega_n t_2}\cos(\omega_d t_1 + \varphi)} = e^{\xi\omega_n(t_2 - t_1)} = e^{\xi\omega_n T_d} \qquad 2.55$$

Le *décrément logarithmique*, $\delta$, est défini comme le logarithme naturel de ce rapport. Par conséquent,

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \xi\omega_n T_d = \xi\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\xi\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad 2.56$$

La résolution de $\xi$ donne la relation inverse

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \qquad 2.57$$

Pour un amortissement très faible $\xi^2 \ll 1$

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi \implies \xi \approx \frac{\delta}{2\pi} \qquad 2.58$$

Considérons ensuite $n+1$ instants successifs dans le temps, tels que les instants adjacents sont séparés par une période naturelle sur le graphique de déplacement pour un système sous-amorti. Si nous supposons que $x_j$ et $x_{j+1}$ représenter la $j^{ème}$ et la $(j+1)^{ème}$ mesure, alors nous avons de l'Eq. (2.56) que

$$\delta = ln\left(\frac{x_j}{x_{j+1}}\right) = \xi\omega_n T_d \qquad 2.59$$

Prenons maintenant le rapport des première et dernière mesures de déplacement. L'utilisation de l'identité ci-dessus dans l'expression résultante donne

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{x_2}\frac{x_2}{x_3}\dots\frac{x_n}{x_{n+1}} = \left(e^{\xi\omega_n T_d}\right)^n = e^{n\xi\omega_n T_d} \qquad 2.60$$

L'évaluation du logarithme naturel de cette expression donne la relation

$$\delta = \frac{1}{n} ln\frac{x_1}{x_{n+1}} \qquad 2.61$$