الجمهوريـــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــة
وزارة التعليـــــــــم العـــــــالي والبحـــــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

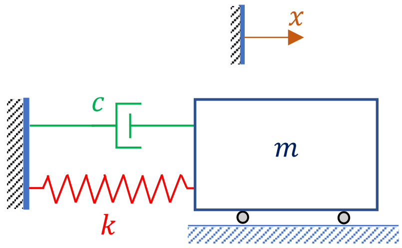
TD5- Vibration libre d'un système à un degré de liberté

Exercice 1

On considère le système représenté sur la figure ci-contre

a) Ecrire l'équation du mouvement.
b) Si on donne : $m = 1\,kg$, $k = 100\,N/m$ et $c = 5\,N.s/m$

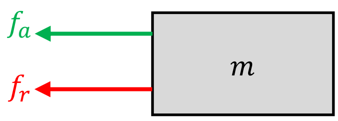
- Calculer la pulsation propre du système.
- Calculer le coefficient d'amortissement critique.
- Calculer le facteur d'amortissement.
- Calculer la pseudo-pulsation.
- Ecrire la réponse du système pour les conditions initiales suivantes :
  à $t = 0$, $x(0) = 0.1\,m$ et $v(0) = 10\,m/s$.



Equation de mouvement

Isoler la masse et tracer le diagramme du corps libre

Application de la 2ème loi de Newton



$$\overset{+}{\rightarrow} \sum f_x = ma_x$$

$$ma_x = -f_a - f_r$$

Relier les forces aux paramètres du problème

$$f_r = kx$$

$$f_a = c\dot{x}$$

Remplacer dans l'équation d'équilibre dynamique

$$m\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0$$

Pulsation propre

$$\omega_n = \sqrt{\tfrac{k}{m}}; \qquad \text{Application numérique} \quad \omega_n = \sqrt{\tfrac{100}{1}} = 10 \;\; rad/s$$

Coefficient d'amortissement critique

$$c_c = 2\sqrt{km}; \qquad \text{Application numérique} \quad c_c = 2\sqrt{100 \times 1} = 20 \;\; N.s/m$$

Facteur d'amortissement

$$\xi = \tfrac{c}{c_c}; \qquad \text{Application numérique} \quad \xi = \tfrac{5}{20} = 0.25$$

Pseudo-pulsation

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{Application numérique} \quad \omega_d = 10\sqrt{1-0.25^2} = 9.68 \;\; rad/s$$

La réponse pour un système sous amorti $(\xi < 1)$ est :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t\right) = e^{-\xi\omega_n t}\left(x_0 \cos\omega_d t + \tfrac{v_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$

$$x(t) = e^{-0.25\times10t}\left(0.1\,cos\,9.68t + \frac{10+0.25\times10\times0.1}{9.68}sin\,9.68t\right) = e^{-2.5t}(0.1\,cos\,9.68t + 1.06\,sin\,9.68t)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{(0.1)^2 + (1.06)^2} = 1.065m$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{-A_2}{A_1}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-1.06}{0.1}\right) = -1{,}4767 \text{ rad} = -84{,}6^\circ$$

$$x(t) = 1.065e^{-2.5t}\,cos(9.68t - 1{,}4767)\,[m]$$

BOUTCHICHA
Djilali

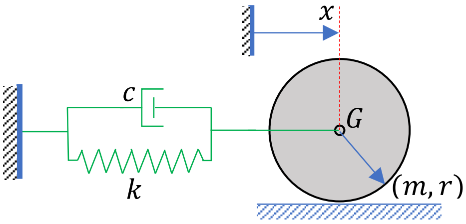
Exercice 2

Un disque de masse m, de rayon r et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

a) Trouver l'équation de mouvement du système en supposant que le disque roule sans glissement.

b) Quelle est la valeur de c qui correspond à l'amortissement critique ?

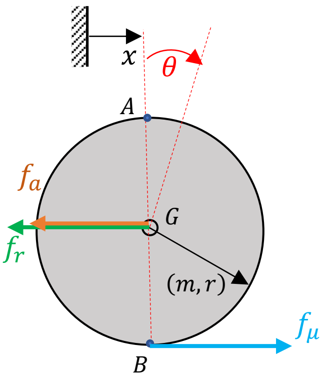
c) L'amortissement est critique, le disque est relâché à partir de $x(0) = x_0$ sans vitesse initiale, trouver le déplacement du centre du disque.



Solution

On définit θ comme le déplacement angulaire du disque autour de son centre de gravité mesuré à partir de la position d'équilibre. Supposant que le disque roule sans glissement, le mouvement de translation et de rotation du disque sont reliés par l'équation

$$x = r\theta$$



a) La force de frottement, qui est inconnue, est définie comme f_μ , tandis que les forces de rappel et d'amortissement visqueux sont :

$$f_r = kx,$$

$$f_a = c\dot{x}.$$

En utilisant les équilibres dynamiques linéaire et angulaire du disque

$$\sum F = (f_\mu - kx - c\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\sum \mathcal{M}_G = (-f_\mu r) = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

En éliminant la force de frottement inconnue, et en utilisant les relations cinématiques, on trouve

$$(f_\mu r) = -\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad f_\mu = -\frac{1}{2}mr\ddot{\theta}$$

BOUTCHICHA
Djilali

Remplaçons l'équation des forces

$$-\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

On a $x = r\theta \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = r\dot{\theta}$ et $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$

$$\frac{1}{2}mr\ddot{\theta} + cr\dot{\theta} + kr\theta + mr\ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{3}{2}mr\ddot{\theta} + cr\dot{\theta} + kr\theta = 0$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

b) On peut écrire l'équation différentielle sous la forme standard

$$\ddot{x} + \frac{2c}{3m}\dot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

avec $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$ et $\xi = \frac{c}{\sqrt{6km}}$

L'amortissement est critique pour $\xi = \frac{c}{\sqrt{6km}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad c = c_c = \sqrt{6km}$

c) Pour un amortissement critique la réponse du système est :

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$

L'expression de la vitesse est :

$$\dot{x}(t) = \big((C_2 - \omega_n C_1) - (\omega_n C_2)t\big)e^{-\omega_n t}$$

Si le système est relâché à partir du repos avec un déplacement initial x_0.

En remplaçant dans la réponse

$$x_0 = x(0) \quad \Longrightarrow \quad C_1 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 - \omega_n C_1 = 0 \Longrightarrow C_2 = \omega_n C_1 = \omega_n x_0$$

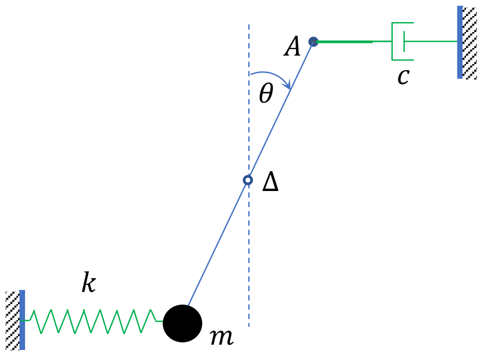
La solution avec des conditions initiales

$$x(t) = x_0(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$$

الجمهوريـــــــــــــــــــــــة الجزائريـــــــــة الديمقراطيـــــــة الشعبيـــــــة
وزارة التعليـــــــــم العــــــــالي والبحــــــــث العلـــــمي
محمد بوضياف جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

BOUTCHICHA
Djilali

Exercice 3



On considère le système mécanique ci-contre constitué d'une tige de longueur L et de masse négligeable pouvant tourner dans un plan vertical autour de son axe fixe Δ .

Le point A est relié à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux c . A l'autre extrémité de la tige est fixée une masse ponctuelle m qui est reliée à un second bâti fixe par un ressort de raideur k. On se place dans le cas des oscillations libres de faible amplitude.

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement satisfaite par θ.
2) Lorsque le système est abandonné sans vitesse initiale, il effectue des oscillations amorties de période $T_d = 0.1\ s$, dont l'amplitude diminue de moitié au bout de 5 périodes. Calculer le coefficient d'amortissement c sachant que $m = 0.5\ kg$.

Solution :

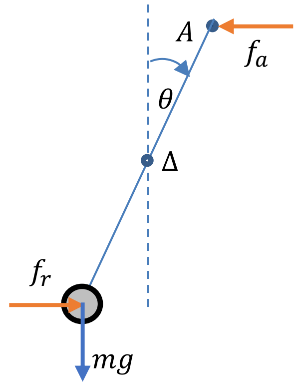


Diagramme du corps libre

Application du théorème cinétique

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta} = I_\Delta \ddot{\theta}$$

$$-f_r \times \frac{l}{2} - f_a \times \frac{l}{2} - mg\frac{l}{2}\sin\theta = I_\Delta\ddot{\theta}$$

$$f_r = k\frac{l}{2}\sin\theta = k\frac{l}{2}\theta$$

$$f_a = c\frac{d}{dt}\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right) = c\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta = c\frac{l}{2}\dot{\theta}$$

$$I_\Delta = m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$m\left(\frac{l}{2}\right)^2\ddot{\theta} + c\frac{l}{2}\dot{\theta}\times\frac{l}{2} + k\frac{l}{2}\frac{l}{2}\theta + mg\frac{l}{2}\theta = 0$$

Equation de mouvement

$$ml\ddot{\theta} + cl\dot{\theta} + (kl + 2mg)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{k}{m} + \frac{2g}{l}\right)\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{2g}{l}} \ \text{ et } 2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0$$

Décrément logarithmique

$$\delta = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}\frac{x_0}{x_n} = \frac{1}{5}\mathrm{Ln}\,2$$

$$\delta = \xi\omega_n T_d = \frac{2\xi\omega_n T_d}{2} = \frac{1}{2}\frac{c}{m}T_d$$

Coefficient d'amortissement

$$c = \frac{2m\delta}{T_d} = \frac{2m}{T_d}\frac{\mathrm{Ln}\,2}{5} = \frac{2\times 0.5}{5\times 0.1}\mathrm{Ln}\,2 = 1.386\ kgs^{-1}\ \equiv\ (Nsm^{-1})$$