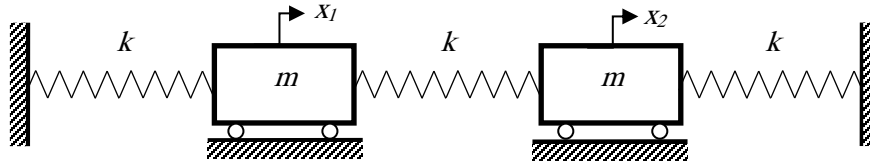




Exercice 1

Pour le système à deux degrés de liberté suivant :



- Déterminer les équations du mouvement avec la méthode de Lagrange.
- Déterminer les pulsations propres et les modes propres correspondants.
- Déterminer les réponses des deux masses si $x_1(0) = +x_2(0) = 1$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

Energie Cinétique

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Energie Potentielle

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Pour $q_1 = x_1$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \right) = m \dot{x}_1 \text{ et } \frac{d}{dt} (m \dot{x}_1) = m \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \right) = k x_1 + k (x_1 - x_2)(+1)$$

$$m \ddot{x}_1 + k x_1 + k (x_1 - x_2)(+1) = 0$$

$$m \ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = 0$$

Pour $q_2 = x_2$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \right) = m \dot{x}_2 \text{ et } \frac{d}{dt} (m \dot{x}_2) = m \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \right) = k (x_1 - x_2)(-1) + k x_2$$

$$m \ddot{x}_2 + k (x_1 - x_2)(-1) + k x_2 = 0$$

$$m \ddot{x}_2 - k x_1 + 2k x_2 = 0$$



Système de deux équations différentielles

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

Equations de mouvement sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On suppose que dans un mode propre

$$\begin{aligned} x_1(t) = X_1 \cos \omega t &\Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\omega^2 X_1 \cos \omega t \\ x_2(t) = X_2 \cos \omega t &\Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\omega^2 X_2 \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

Pour avoir des solutions non triviales il faut que le déterminant du système soit nul

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'équation caractéristique

$$3k^2 - 4km\omega^2 + m^2\omega^4 = 0$$

$$3k^2 - 4km\lambda + m^2\lambda^2 = 0, \text{ les valeurs propres sont : } \left\{ \lambda_1 = \frac{k}{m}, \lambda_2 = \frac{3k}{m} \right\}$$

Les pulsations propres

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$(2k - m\omega^2)X_1 - kX_2 = 0$$

$$-kX_1 + (2k - m\omega^2)X_2 = 0$$

Les fractions modales

$$r_i = \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^{(i)} = \frac{2k - m\omega_i^2}{k} = \frac{k}{(2k - m\omega_i^2)}$$

$$\text{mode 1} \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m}$$

$$r_1 = \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^{(1)} = \frac{2k - m\omega_1^2}{k} = \frac{2k - m \frac{k}{m}}{k} = 1$$

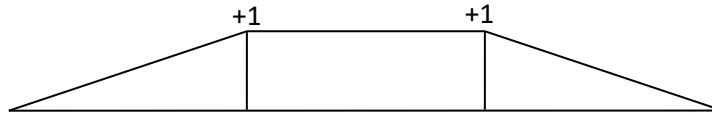
$$\text{mode 2} \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m}$$

$$r_2 = \left(\frac{X_2}{X_1} \right)^{(2)} = \frac{2k - m\omega_2^2}{k} = \frac{2k - m \frac{3k}{m}}{k} = -1$$

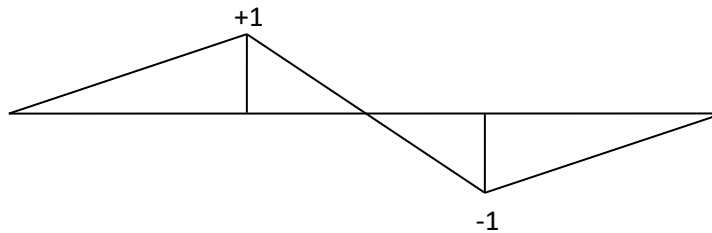


Les vecteurs propres

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ r_1 X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X_1$$



$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ r_2 X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} X_1$$



$$x_1(t) = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t$$

$$x_2(t) = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t - A_2 \cos \omega_2 t - B_2 \sin \omega_2 t$$

$$\dot{x}_1(t) = -\omega_1 A_1 \sin \omega_1 t + \omega_1 B_1 \cos \omega_1 t - \omega_2 A_2 \sin \omega_2 t + \omega_2 B_2 \cos \omega_2 t$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega_1 A_1 \sin \omega_1 t + \omega_1 B_1 \cos \omega_1 t + \omega_2 A_2 \sin \omega_2 t - \omega_2 B_2 \cos \omega_2 t$$

Conditions aux limites

$$x_1(0) = 1 \Rightarrow A_1 + A_2 = 1$$

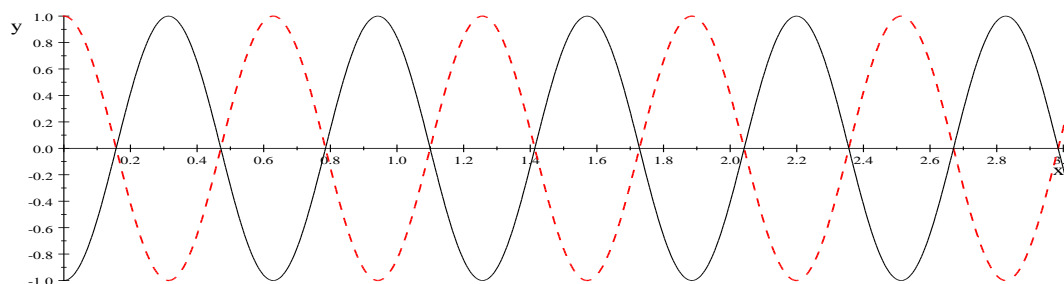
$$x_2(0) = -1 \Rightarrow A_1 - A_2 = -1 \Rightarrow [A_1 = 0, A_2 = 1]$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \Rightarrow \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 = 0$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow \omega_1 B_1 - \omega_2 B_2 = 0 \Rightarrow [\omega_1 B_1 = 0, \omega_2 B_2 = 0]$$

$$x_1(t) = +\cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

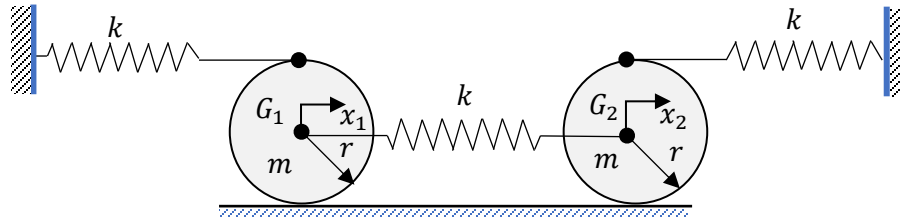
$$x_2(t) = -\cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$





Exercice 2

Pour le système à deux degrés de liberté composé de deux cylindres identiques de masse m qui roulent sans glissement ($x_1 = r\theta_1$; $x_2 = r\theta_2$) et de trois ressorts identiques de constante de raideur k .



- Calculer l'énergie cinétique totale des cylindres.
- Calculer l'énergie potentielle totale de déformation des ressorts.
- Déterminer les équations de mouvement avec la méthode de Lagrange.
- Calculer les pulsations propres.
(Utiliser θ_1 et θ_2 comme coordonnées généralisées)

Solution

a) Energie potentielle

A l'instant t le centre de gravité du premier cylindre se déplace de x_1 en roulant et le centre de gravité du deuxième cylindre se déplace de x_2 en roulant.

Le ressort à gauche s'allonge de $(2x_1)$.

Le ressort du milieu s'allonge de $(x_2 - x_1)$.

Le ressort à droite s'allonge de $(2x_2)$.

$$V = \frac{1}{2}k(2x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(2x_2)^2$$

$$V = 2k(x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_1)^2 - kx_2x_1 + \frac{1}{2}k(x_2)^2 + 2k(x_2)^2$$

$$V = +\frac{5}{2}k(x_1)^2 - kx_2x_1 + \frac{5}{2}k(x_2)^2$$

$$V = +\frac{5}{2}kr^2(\theta_1)^2 - kr^2\theta_1\theta_2 + \frac{5}{2}kr^2(\theta_2)^2$$



b) Energie cinétique

Le 1^{er} cylindre possède une translation x_1 du centre de gravité et une rotation θ_1 ($x_1 = r\theta_1$) autour de lui.

Le 2^{ème} cylindre possède une translation x_2 du centre de gravité et une rotation θ_2 ($x_2 = r\theta_2$) autour de lui.

Le moment d'inertie massique d'un cylindre autour d'un axe passant par son centre gravité $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}I_G(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}I_G(\dot{\theta}_2)^2$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_2)^2$$

Comme $\dot{x}_1 = r\dot{\theta}_1$ et $\dot{x}_2 = r\dot{\theta}_2$

$$T = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_2)^2$$

$$T = \frac{3}{4}m(r\dot{\theta}_1)^2 + \frac{3}{4}m(r\dot{\theta}_2)^2$$

c) Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2$$

Première coordonnée généralisée ($q_1 = \theta_1$).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 5kr^2\theta_1 - kr^2\theta_2$$

Première équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_1 + 5kr^2\theta_1 - kr^2\theta_2 = 0$$

Deuxième coordonnée généralisée ($q_2 = \theta_2$).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0$$



$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = -kr^2\theta_1 + 5kr^2\theta_2$$

Deuxième équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_2 - kr^2\theta_1 + 5kr^2\theta_2 = 0$$

Les équations de mouvement sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & 5k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Les pulsations propres

On suppose que dans un mode propre

$$\begin{aligned} \theta_1(t) = X_1 \cos \omega t & \Rightarrow \ddot{\theta}_1(t) = -\omega^2 \theta_1 \cos \omega t \\ \theta_2(t) = X_2 \cos \omega t & \Rightarrow \ddot{\theta}_2(t) = -\omega^2 \theta_2 \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 5k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -k \\ -k & 5k - \frac{3}{2}m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Pour avoir des solutions non triviales il faut que le déterminant du système soit nul

$$\begin{vmatrix} 5k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -k \\ -k & 5k - \frac{3}{2}m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'équation caractéristique

$$\left(5k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)^2 - k^2 = 0$$

$$\left(5k - \frac{3}{2}m\omega^2 - k\right)\left(5k - \frac{3}{2}m\omega^2 + k\right) = 0$$

$$\left(4k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)\left(6k - \frac{3}{2}m\omega^2\right) = 0$$

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{2k}{3m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$