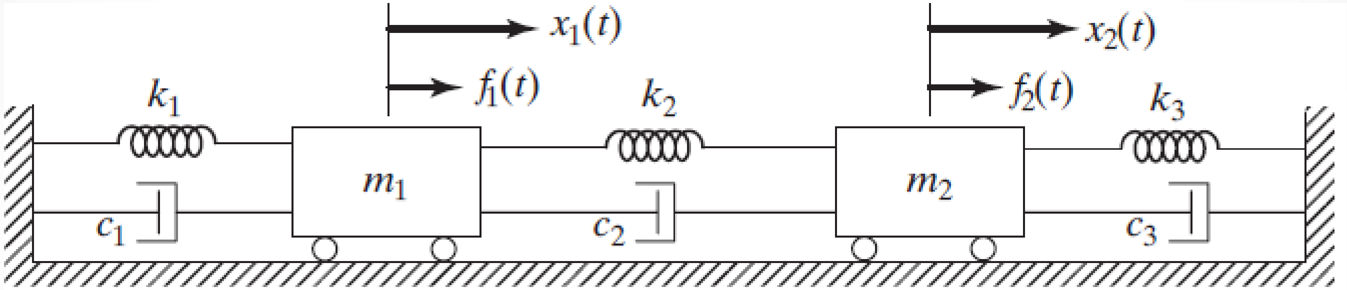
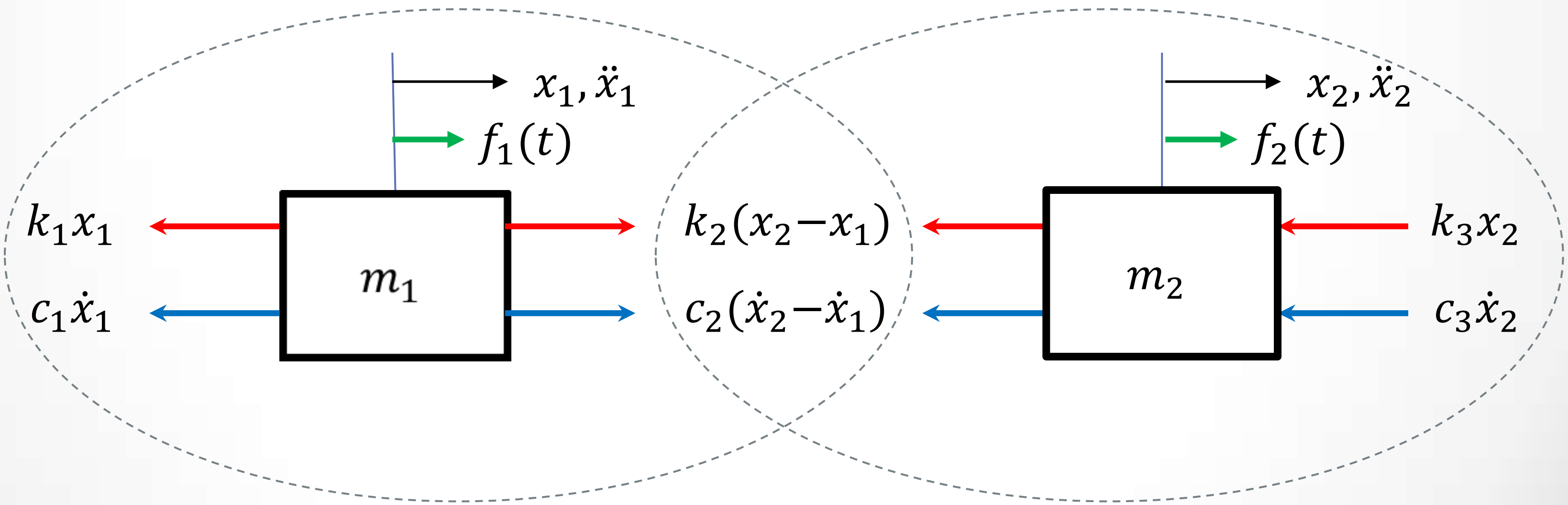
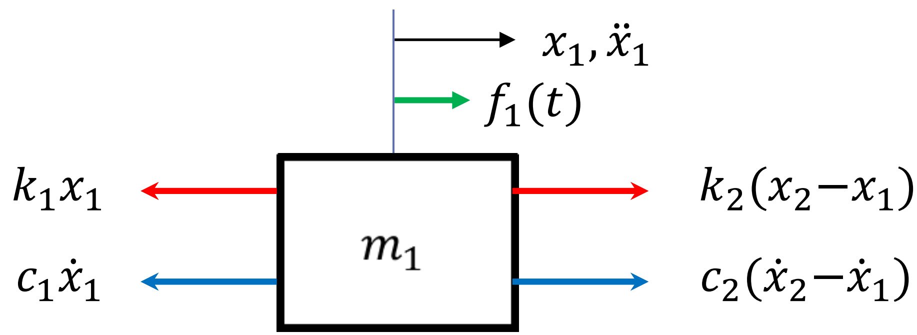
Système à 2DDL : Equations de mouvement





Système à 2DDL : Equations de mouvement

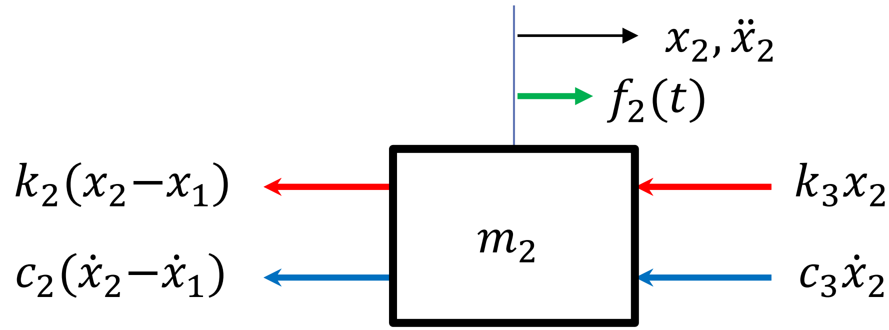


$$\overset{+}{\rightarrow} \sum f_x = m_1 a_x$$

$$-k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f_1(t) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_1(t)$$

Système à 2DDL : Equations de mouvement



$$\overset{+}{\rightarrow} \sum f_x = m_2 a_x$$

$$-k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2 + f_2(t) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - k_3 x_2 + (k_2 + k_3)x_1 = f_2(t)$$

Système à 2DDL : Equations de mouvement

$$m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=f_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+(c_2+c_3)\dot{x}_2-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2=f_2(t)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ matrice masse

$\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}$ matrice d'amortissement

$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$ matrice de rigidité

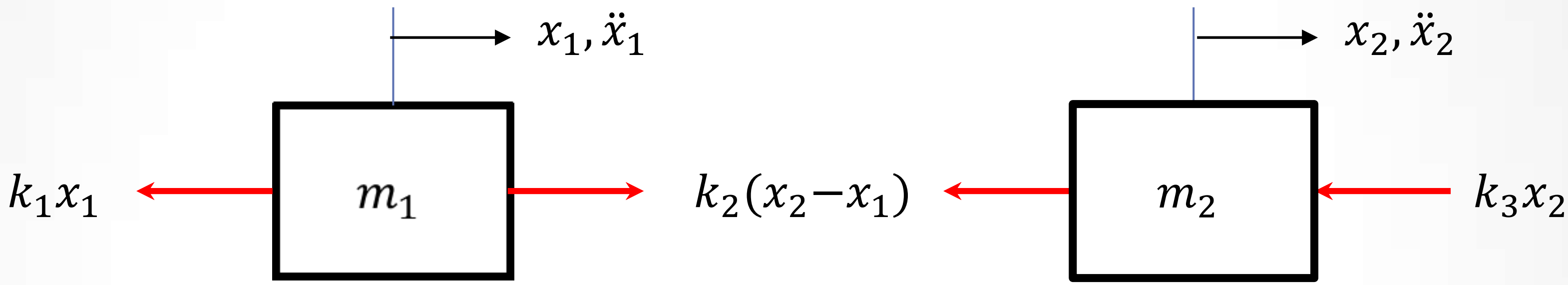
$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ vecteur déplacement

$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}$ vecteur vitesse

$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}$ vecteur accélération

$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$ vecteur force

Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti



$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0$$

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$[\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2 X_2] \cos(\omega t + \phi) = 0$$
$$[-k_2 X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2] \cos(\omega t + \phi) = 0$$

Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

$$[\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\}X_1 - k_2X_2] = 0$$
$$[-k_2X_1 + \{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solution triviale $\Rightarrow X_1 = X_2 = 0 \Rightarrow$ pas de vibration

$$\det \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{bmatrix} = 0$$

$$(m_1 m_2 \omega^4) - \{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\}\omega^2 + \left\{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - {k_2}^2\right\} = 0$$

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\}$$
$$\mp \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1}{m_1 m_2}\right\}^2 - 4\left\{\frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2}{m_1 m_2}\right\}\right]^{1/2}$$

Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

Pour $\omega^2 = {\omega_1}^2$

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2 + (k_2 + k_3)}$$

Pour $\omega^2 = {\omega_2}^2$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2 + (k_1 + k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2 + (k_2 + k_3)}$$

Les vecteurs propres correspondants :

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

Le premier mode

$$\vec{x}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix}$$

Le second mode

$$\vec{x}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{Bmatrix}$$

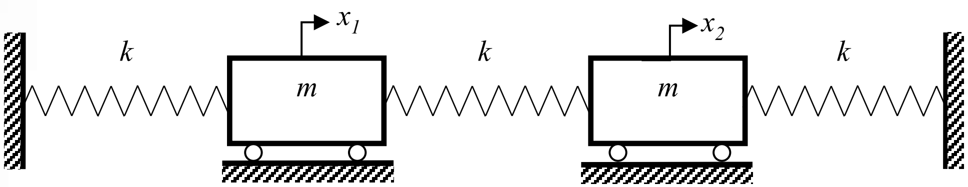
Pour des conditions initiales générales

$$\vec{x}(t) = c_1 \vec{x}^{(1)}(t) + c_2 \vec{x}^{(2)}(t)$$

$$x_1(t) = x_1^{(1)}(t) + x_1^{(2)}(t) = X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t) = r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

Exemple



Les équations de mouvement

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

Dans un mode propre

$$\begin{matrix} x_1(t) = X_1\cos(\omega t+\varphi) \\ x_2(t) = X_2\cos(\omega t+\varphi) \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \ddot{x}_1(t) = -\omega^2 X_1\cos(\omega t+\varphi) \\ \ddot{x}_2(t) = -\omega^2 X_2\cos(\omega t+\varphi) \end{matrix}$$

Des équations algébriques

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & 2k-m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour avoir une solution non triviale if faut que :

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & 2k-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

L'équation caractéristique

$$(2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0 \Longrightarrow (k - m\omega^2)(3k - m\omega^2) = 0$$

Les pulsations propres

$$\omega_1{}^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad \omega_2{}^2 = \frac{3k}{m}$$

Fractions modales

$$r_1 = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{(1)} = \frac{2k - m\omega_1{}^2}{k} = \frac{2k - m\dfrac{k}{m}}{k} = +1$$

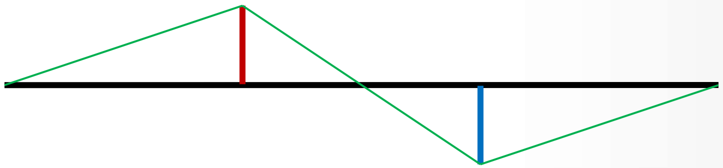
$$r_2 = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{(2)} = \frac{2k - m\omega_2{}^2}{k} = \frac{2k - m\dfrac{3k}{m}}{k} = -1$$

Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

Les vecteurs propres :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ r_1 X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \end{pmatrix} X_1$$

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ r_2 X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} X_1$$



Les réponses des deux masses :

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)$$
$$x_2(t) = A_1 r_1 \cos(\omega_1 t) + B_1\, r_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 r_2 \cos(\omega_2 t) + B_2\, r_2 \sin(\omega_2 t)$$

$$\begin{matrix} r_1 = +1 \\ r_2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \\ x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) - A_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \sin(\omega_2 t) \end{matrix}$$

Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

Les conditions initiales

Expressions des réponses :

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t)$$
$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) - A_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \sin(\omega_2 t)$$

Expressions des vitesses :

$$\dot{x}_1(t) = -\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t) + \omega_1 B_1 \cos(\omega_1 t) - \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t) + \omega_2 B_2 \cos(\omega_2 t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t) + \omega_1 B_1 \cos(\omega_1 t) + \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t) - \omega_2 B_2 \cos(\omega_2 t)$$

Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

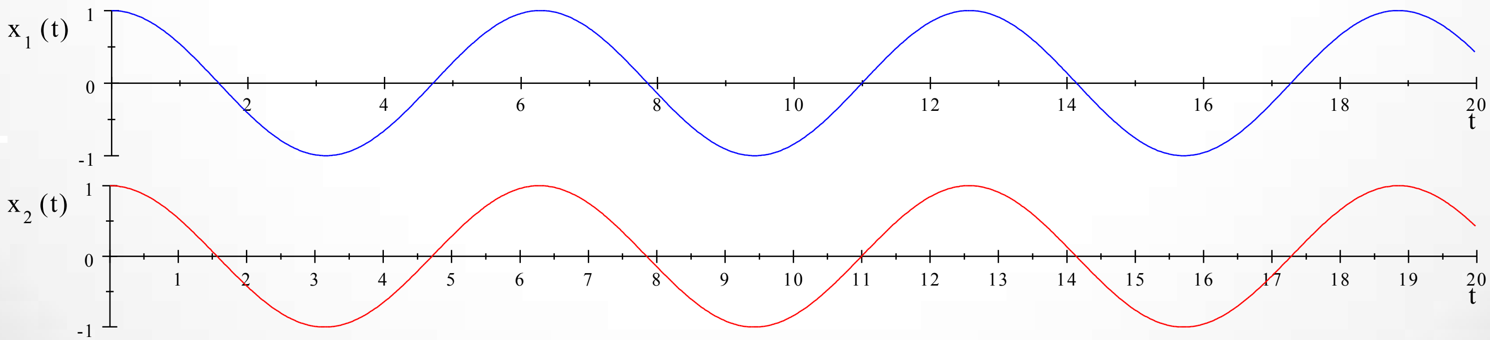
Les conditions initiales (1er cas $x_1(0) = x_2(0) = 1$)

$$x_1(0) = +1 \Rightarrow A_1 + A_2 = 1$$
$$x_2(0) = +1 \Rightarrow A_1 - A_2 = 1$$
$$\Longrightarrow \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \Rightarrow \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 = 0$$
$$\dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow \omega_1 B_1 - \omega_2 B_2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0$$

Les deux masses vibrent en phase avec ω_1 (mode 1)

$$x_1(t) = +\cos\sqrt{k/m}\,t \qquad \& \qquad x_2(t) = +\cos\sqrt{k/m}\,t$$



Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

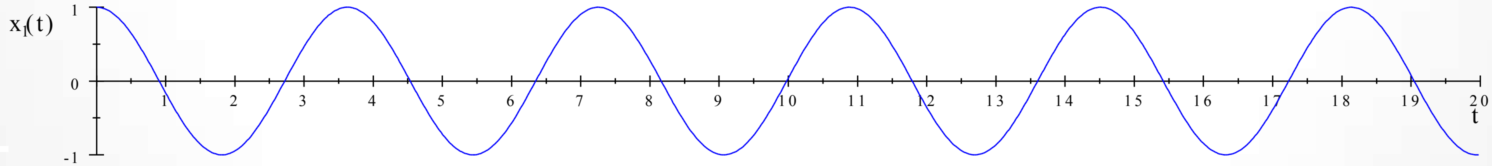
Les conditions initiales (2ème cas $x_1(0) = 1$ & $x_2(0) = -1$)

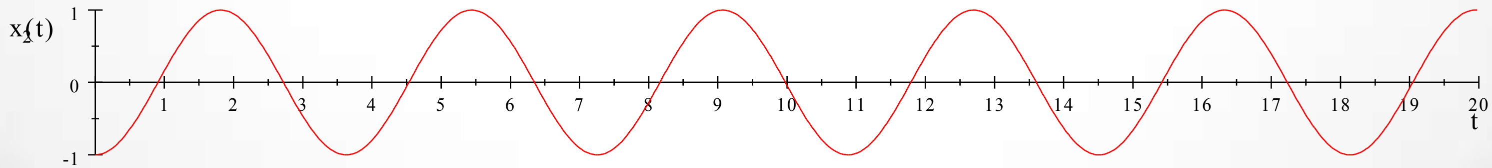
$$x_1(0) = +1 \Rightarrow A_1 + A_2 = +1$$
$$x_2(0) = -1 \Rightarrow A_1 - A_2 = -1$$
$$\Longrightarrow \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 1$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \Rightarrow \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 = 0$$
$$\dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow \omega_1 B_1 - \omega_2 B_2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0$$

Les deux masses vibrent en opposition avec ω_2 (mode 2)

$$x_1(t) = +\cos\sqrt{3k/m}\,t \qquad \& \qquad x_2(t) = -\cos\sqrt{3k/m}\,t$$





Système à 2DDL : Analyse des vibrations libres d'un système non amorti

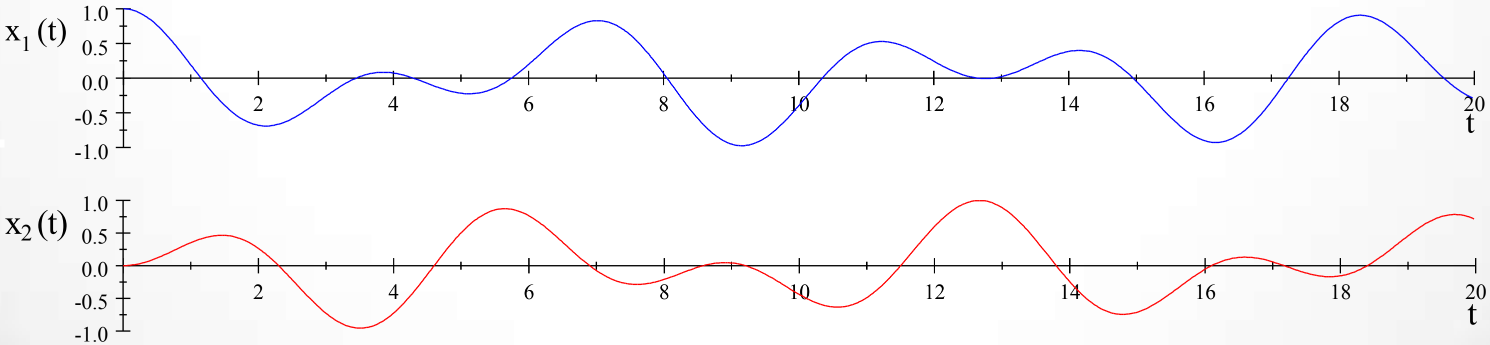
Les conditions initiales (2ème cas $x_1(0) = 1$ & $x_2(0) = 0$)

$$x_1(0) = +1 \;\Rightarrow A_1 + A_2 = +1$$
$$x_2(0) = 0 \;\Rightarrow A_1 - A_2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad A_1 = 1/2, \quad A_2 = 1/2$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \;\Rightarrow \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 = 0$$
$$\dot{x}_2(0) = 0 \;\Rightarrow \omega_1 B_1 - \omega_2 B_2 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0$$

Les deux masses vibrent avec ω_1 et ω_2 (modes 1 & 2)

$$x_1(t) = +\tfrac{1}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + \tfrac{1}{2}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t \quad \& \quad x_2(t) = +\tfrac{1}{2}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t - \tfrac{1}{2}\cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t$$



Système à 2DDL : Vibration Forcée

Les équations de mouvement sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Les forces appliquées sont harmoniques

$$F_j(t) = F_{j0} e^{i\Omega t}, \quad j = 1,2$$

Les réponses sont aussi harmoniques avec la même fréquence

$$x_j(t) = X_{j0} e^{i\Omega t}, \quad j = 1,2$$

En remplaçant dans le système d'équations de mouvement

$$\begin{bmatrix} (-\Omega^2 m_{11} + i\Omega c_{11} + k_{11}) & (-\Omega^2 m_{12} + i\Omega c_{12} + k_{12}) \\ (-\Omega^2 m_{12} + i\Omega c_{12} + k_{12}) & (-\Omega^2 m_{22} + i\Omega c_{22} + k_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

Système à 2DDL : Vibration Forcée

L'impédance mécanique $Z_{rs}(i\Omega)$ est définie comme:

$$Z_{rs}(i\Omega) = -\Omega^2 m_{rs} + i\Omega c_{rs} + k_{rs}, \qquad r, s = 1,2$$

$$[Z(i\Omega)]\vec{X} = \vec{F}_0$$

$$[Z(i\Omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(i\Omega) & Z_{12}(i\Omega) \\ Z_{12}(i\Omega) & Z_{22}(i\Omega) \end{bmatrix}$$ = matrice des impédances

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \qquad \vec{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \end{Bmatrix}$$

Système à 2DDL : Vibration Forcée

L'équation est résolue pour donner :

$$\vec{X} = [Z(i\Omega)]^{-1}\vec{F}_0$$

L'inverse de la matrice des impédances est donnée par :

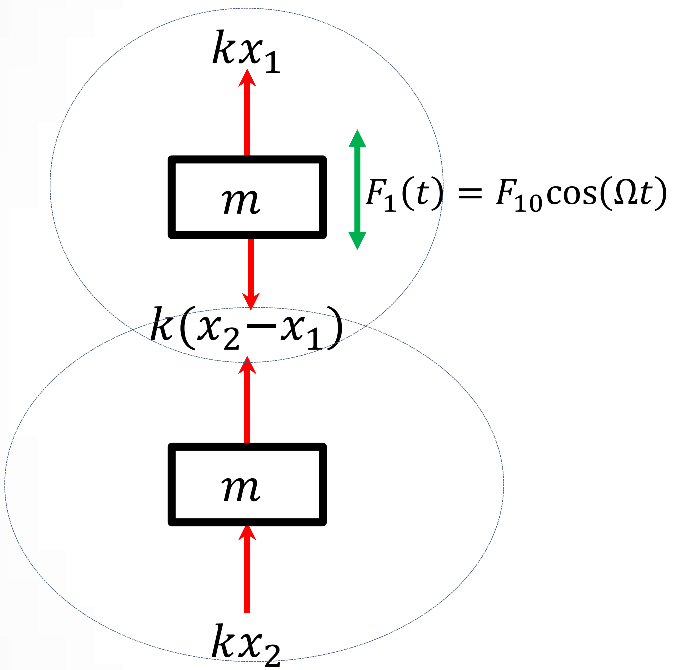
$$[Z(i\Omega)]^{-1} = \frac{1}{\left(Z_{11}(i\Omega)Z_{22}(i\Omega) - Z^2{}_{22}(i\Omega)\right)}\begin{bmatrix} Z_{22}(i\Omega) & -Z_{12}(i\Omega) \\ -Z_{12}(i\Omega) & Z_{11}(i\Omega) \end{bmatrix}$$

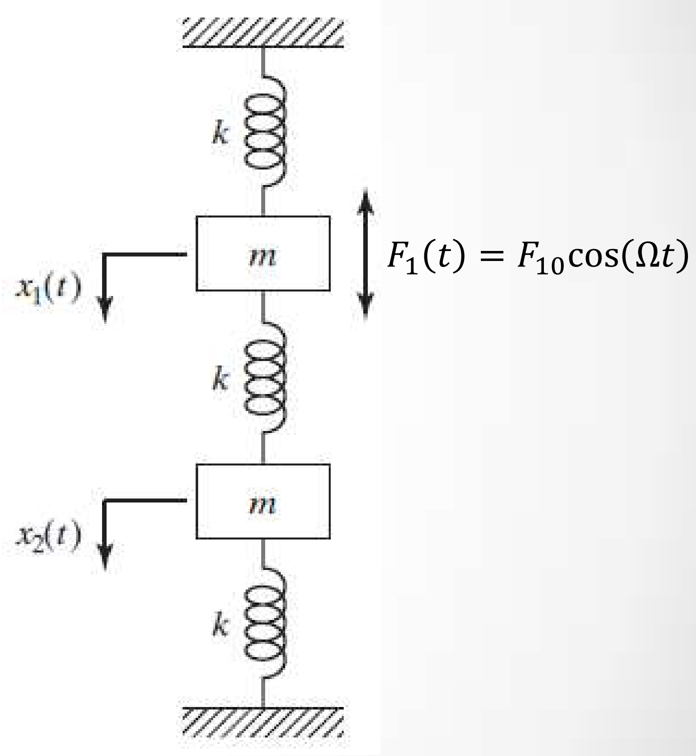
Les solutions sont données par :

$$X_1(i\Omega) = \frac{Z_{22}(i\Omega)F_{10} - Z_{12}(i\Omega)F_{20}}{\left(Z_{11}(i\Omega)Z_{22}(i\Omega) - Z^2{}_{12}(i\Omega)\right)}$$

$$X_2(i\Omega) = \frac{-Z_{12}(i\Omega)F_{10} + Z_{11}(i\Omega)F_{20}}{\left(Z_{11}(i\Omega)Z_{22}(i\Omega) - Z^2{}_{12}(i\Omega)\right)}$$

Système à 2DDL : vibrations forcées d'un système non amorti





$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_{10}\cos(\Omega t)$$

$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

Système à 2DDL : vibrations forcées d'un système non amorti

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{10}\cos(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On suppose que la solution est de la forme :

$$x_j(t) = X_j \cos(\Omega t)\,, \qquad j = 1,2$$

Les impédances sont :

$$Z_{11}(\Omega) = Z_{22}(\Omega) = -m\Omega^2 + 2k, \qquad Z_{12}(\Omega) = -k$$

$$X_1(\Omega) = \frac{(-m\Omega^2 + 2k)F_{10}}{(-m\Omega^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{(-m\Omega^2 + 2k)F_{10}}{(-m\Omega^2 + 3k)(-m\Omega^2 + k)}$$

$$X_2(\Omega) = \frac{kF_{10}}{(-m\Omega^2 + 2k)^2 - k^2} = \frac{kF_{10}}{(-m\Omega^2 + 3k)(-m\Omega^2 + k)}$$

Système à 2DDL : vibrations forcées d'un système non amorti

En définissant les pulsations propres ω_1 et ω_2.

$$(\omega_1)^2 = \frac{k}{m} \qquad \& \qquad (\omega_2)^2 = \frac{3k}{m}$$

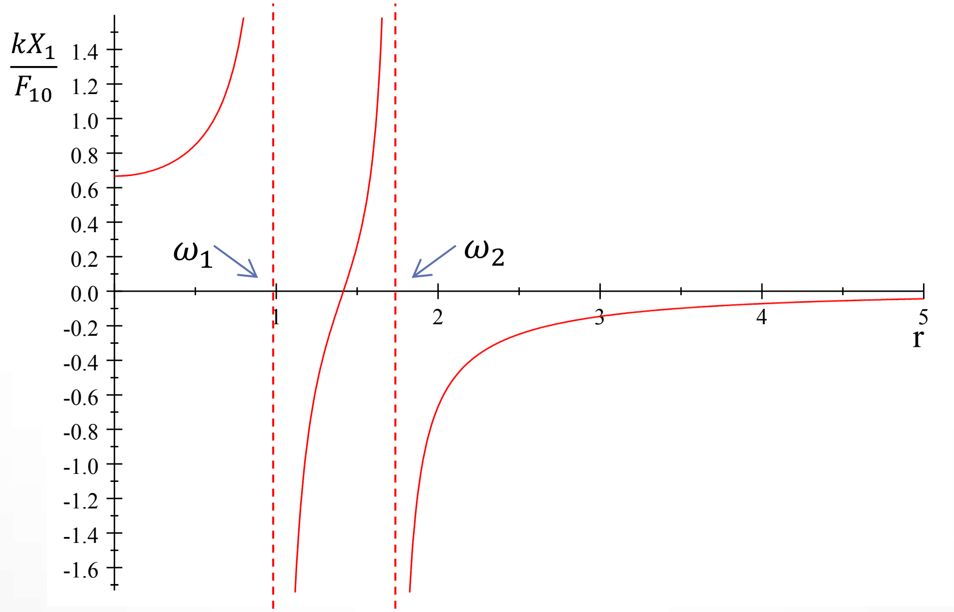
$$X_1(\Omega) = \frac{\left(\frac{-m\Omega^2}{k} + 2\frac{k}{k}\right)F_{10}}{\left(\frac{-m\Omega^2}{k} + 3\frac{k}{k}\right)\left(\frac{-m\Omega^2}{k} + \frac{k}{k}\right)k} = \frac{\left(2 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right)F_{10}}{k\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right]}$$

$$X_2(\Omega) = \frac{\frac{k}{k}F_{10}}{\left(\frac{-m\Omega^2}{k} + 3\frac{k}{k}\right)\left(\frac{-m\Omega^2}{k} + \frac{k}{k}\right)k} = \frac{F_{10}}{k\left[\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right]}$$

Système à 2DDL : vibrations forcées d'un système non amorti

En définissant le rapport des fréquences $r = \frac{\Omega}{\omega_1}$.

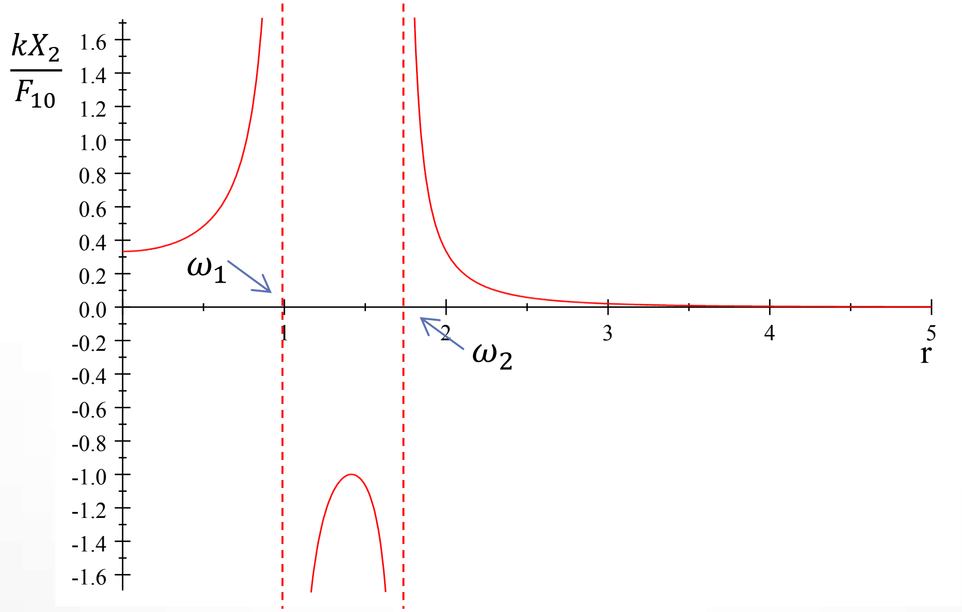
$$\frac{kX_1}{F_{10}} = \frac{(2 - r^2)}{[3 - r^2][1 - r^2]}$$



Système à 2DDL : vibrations forcées d'un système non amorti

En définissant le rapport des fréquences $r = \frac{\Omega}{\omega_1}$.

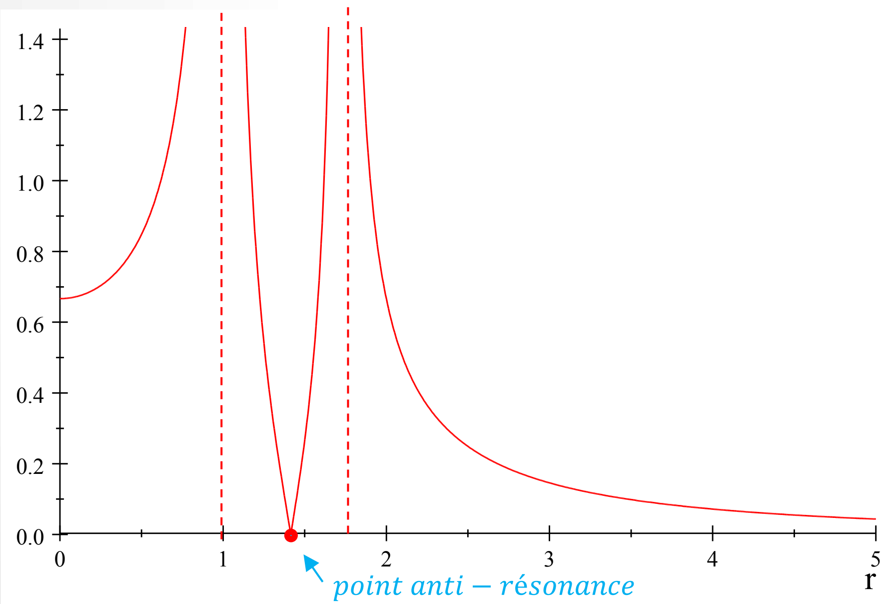
$$\frac{kX_2}{F_{10}} = \frac{1}{[3 - r^2][1 - r^2]}$$



Système à 2DDL : vibrations forcées d'un système non amorti

Les facteurs d'amplifications dynamiques.

$$\left|\frac{kX_1}{F_{10}}\right|$$



$$\left|\frac{kX_2}{F_{10}}\right|$$