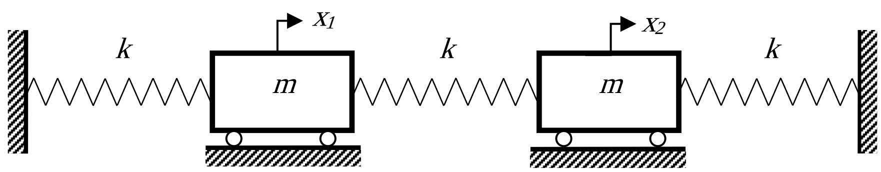
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant : BOUTCHICHA Djilali

Système à deux degrés de liberté

Exercice 1

Pour le système à deux degrés de liberté suivant :



a) Déterminer les équations du mouvement avec la méthode de Lagrange.
b) Déterminer les pulsations propres et les modes propres correspondants.
c) Déterminer les réponses des deux masses si $x_1(0) = +x_2(0) = 1$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$

Energie Cinétique

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{x}_2^2$$

Energie Potentielle

$$V = \tfrac{1}{2} kx_1^2 + \tfrac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2 + \tfrac{1}{2} kx_2^2$$

Les équations de Lagrange

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \tfrac{\partial T}{\partial q_i} + \tfrac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Pour $q_1 = x_1$

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \tfrac{\partial T}{\partial x_1} + \tfrac{\partial V}{\partial q_1} = 0$$

$$\tfrac{\partial}{\partial \dot{x}_1}\left(\tfrac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{x}_2^2\right) = m\dot{x}_1 \text{ et } \tfrac{d}{dt}\left(m\dot{x}_1\right) = m\ddot{x}_1$$

$$\tfrac{\partial T}{\partial x_1} = 0$$

$$\tfrac{\partial}{\partial q_1}\left(\tfrac{1}{2} kx_1^2 + \tfrac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2 + \tfrac{1}{2} kx_2^2\right) = kx_1 + k(x_1 - x_2)(+1)$$

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2)(+1) = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

Pour $q_2 = x_2$

$$\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \tfrac{\partial T}{\partial x_2} + \tfrac{\partial V}{\partial q_2} = 0$$

$$\tfrac{\partial}{\partial \dot{x}_2}\left(\tfrac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2} m\dot{x}_2^2\right) = m\dot{x}_2 \text{ et } \tfrac{d}{dt}\left(m\dot{x}_2\right) = m\ddot{x}_2$$

$$\tfrac{\partial T}{\partial x_2} = 0$$

$$\tfrac{\partial}{\partial q_2}\left(\tfrac{1}{2} kx_1^2 + \tfrac{1}{2} k(x_1 - x_2)^2 + \tfrac{1}{2} kx_2^2\right) = k(x_1 - x_2)(-1) + kx_2$$

$$m\ddot{x}_2 + k(x_1 - x_2)(-1) + kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

Enseignant :
BOUTCHICHA
Djilali

Système de deux équations différentielles

$$\begin{Bmatrix} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Equations de mouvement sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On suppose que dans un mode propre

$$\begin{matrix} x_1(t) = X_1 \cos\omega t \\ x_2(t) = X_2 \cos\omega t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \ddot{x}_1(t) = -\omega^2 X_1 \cos\omega t \\ \ddot{x}_2(t) = -\omega^2 X_2 \cos\omega t \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ,$$

Pour avoir des solutions non triviales il faut que le déterminant du système soit nul

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'équation caractéristique

$$3k^2 - 4km\omega^2 + m^2\omega^4 = 0$$

$3k^2 - 4km\lambda + m^2\lambda^2 = 0$, les valeurs propres sont : $\left\{\lambda_1 = \frac{k}{m}, \lambda_2 = \frac{3k}{m}\right\}$

Les pulsations propres

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$(2k - m\omega^2)X_1 - kX_2 = 0$$

$$-kX_1 + (2k - m\omega^2)X_2 = 0$$

Les fractions modales

$$r_i = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{(i)} = \frac{2k - m\omega_i^2}{k} = \frac{k}{\left(2k - m\omega_i^2\right)}$$

mode 1 $\quad \omega_1^2 = \dfrac{k}{m}$

$$r_1 = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{(1)} = \frac{2k - m\omega_1^2}{k} = \frac{2k - m\frac{k}{m}}{k} = 1$$

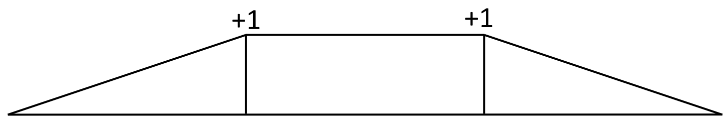
mode 2 $\quad \omega_2^2 = \dfrac{3k}{m}$

$$r_2 = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{(2)} = \frac{2k - m\omega_2^2}{k} = \frac{2k - m\frac{3k}{m}}{k} = -1$$

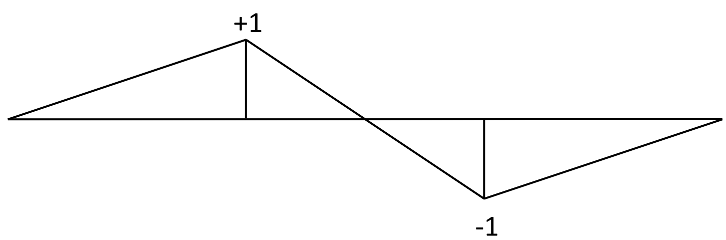
Enseignant :
BOUTCHICHA
Djilali

Les vecteurs propres

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ r_1 X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X_1$$



$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ r_2 X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} X_1$$



$$x_1(t) = A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t$$

$$x_2(t) = A_1 \cos\omega_1 t + B_1 \sin\omega_1 t - A_2 \cos\omega_2 t - B_2 \sin\omega_2 t$$

$$\dot{x}_1(t) = -\omega_1 A_1 \sin\omega_1 t + \omega_1 B_1 \cos\omega_1 t - \omega_2 A_2 \sin\omega_2 t + \omega_2 B_2 \cos\omega_2 t$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega_1 A_1 \sin\omega_1 t + \omega_1 B_1 \cos\omega_1 t + \omega_2 A_2 \sin\omega_2 t - \omega_2 B_2 \cos\omega_2 t$$

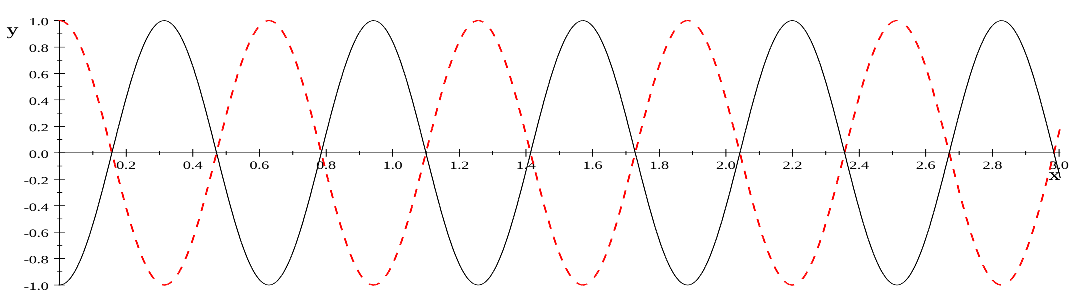
Conditions aux limites

$$\begin{matrix} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1 - A_2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow [A_1 = 0, A_2 = 1]$$

$$\begin{matrix} \dot{x}_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 = 0 \\ \omega_1 B_1 - \omega_2 B_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow [\omega_1 B_1 = 0,\ \omega_2 B_2 = 0]$$

$$x_1(t) = +\cos\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t$$

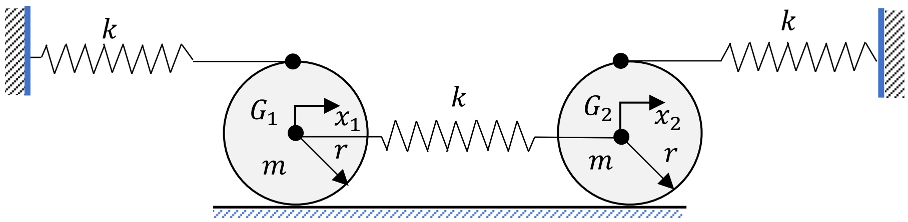
$$x_2(t) = -\cos\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t$$



Enseignant : BOUTCHICHA Djilali

Exercice 2

Pour le système à deux degrés de liberté composé de deux cylindres identiques de masse m qui roulent sans glissement ($x_1 = r\theta_1$; $x_2 = r\theta_2$) et de trois ressorts identiques de constante de raideur k.



a) Calculer l'énergie cinétique totale des cylindres.
b) Calculer l'énergie potentielle totale de déformation des ressorts.
c) Déterminer les équations de mouvement avec la méthode de Lagrange.
d) Calculer les pulsations propres.
(*Utiliser θ_1 et θ_2 comme coordonnées généralisées*)

Solution

a) Energie potentielle

A l'instant t le centre de gravité du premier cylindre se déplace de x_1 en roulant et le centre de gravité du deuxième cylindre se déplace de x_2 en roulant.
Le ressort à gauche s'allonge de $(2x_1)$.
Le ressort du milieu s'allonge de $(x_2 - x_1)$.
Le ressort à droite s'allonge de $(2x_2)$.

$$V = \frac{1}{2}k(2x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(2x_2)^2$$

$$V = 2k(x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_1)^2 - kx_2x_1 + \frac{1}{2}k(x_2)^2 + 2k(x_2)^2$$

$$V = +\frac{5}{2}k(x_1)^2 - kx_2x_1 + \frac{5}{2}k(x_2)^2$$

$$V = +\frac{5}{2}kr^2(\theta_1)^2 - kr^2\theta_1\theta_2 + \frac{5}{2}kr^2(\theta_2)^2$$

b) Energie cinétique

Le 1er cylindre possède une translation x_1 du centre de gravité et une rotation θ_1 $(x_1 = r\theta_1)$ autour de lui.
Le 2ème cylindre possède une translation x_2 du centre de gravité et une rotation θ_2 $(x_2 = r\theta_2)$ autour de lui.
Le moment d'inertie massique d'un cylindre autour d'un axe passant par son centre gravité $I_G = \frac{1}{2}mr^2$.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}I_G(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}I_G(\dot{\theta}_1)^2$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1)^2$$

Comme $\dot{x}_1 = r\dot{\theta}_1$ et $\dot{x}_2 = r\dot{\theta}_2$

$$T = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(\dot{\theta}_1)^2$$

$$T = \frac{3}{4}m(r\dot{\theta}_1)^2 + \frac{3}{4}m(r\dot{\theta}_2)^2$$

c) Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1,2$$

Première cordonnée généralisée $(q_1 = \theta_1)$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{3}{2}mr^2\dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 5kr^2\theta_1 - kr^2\theta_2$$

Première équation de mouvement

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta}_1 + 5kr^2\theta_1 - kr^2\theta_2 = 0$$

Deuxième cordonnée généralisée $(q_2 = \theta_2)$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{3}{2} m r^2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{3}{2} m r^2 \ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = -kr^2\theta_1 + 5kr^2\theta_2$$

Deuxième équation de mouvement

$$\frac{3}{2} m r^2 \ddot{\theta}_2 - kr^2\theta_1 + 5kr^2\theta_2 = 0$$

Les équations de mouvement sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & 5k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Les pulsations propres

On suppose que dans un mode propre

$$\begin{matrix} \theta_1(t) = \Theta_1 \cos\omega t \\ \theta_2(t) = \Theta_2 \cos\omega t \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \ddot{\theta}_1(t) = -\omega^2 \Theta_1 \cos\omega t \\ \ddot{\theta}_2(t) = -\omega^2 \Theta_2 \cos\omega t \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -k \\ -k & 5k - \frac{3}{2}m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

Pour avoir des solutions non triviales il faut que le déterminant du système soit nul

$$\begin{vmatrix} 5k - \frac{3}{2}m\omega^2 & -k \\ -k & 5k - \frac{3}{2}m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

d'où l'équation caractéristique

$$\left(5k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)^2 - k^2 = 0$$

$$\left(5k - \frac{3}{2}m\omega^2 - k\right)\left(5k - \frac{3}{2}m\omega^2 + k\right) = 0$$

$$\left(4k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)\left(6k - \frac{3}{2}m\omega^2\right) = 0$$

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}} \quad et \quad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

الجمهوريــــــــــــــــــة الجزائريــــــــة الديمقراطيــــــــة الشعبيــــــة
وزارة التعليــــــــم العـــــــالي والبحــــــث العلـــــمي
جامعة وهران للعلوم والتكنولوجيا محمد بوضياف
Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed BOUDIAF
Faculté de Génie Mécanique
Département de Génie Mécanique

Enseignant :
BOUTCHICHA
Djilali

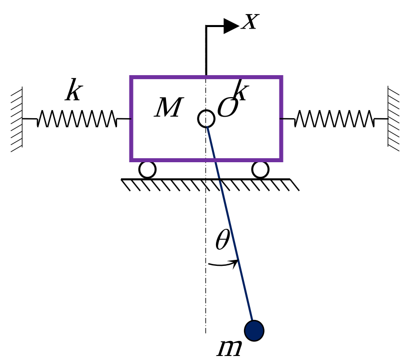
Exercice 1

Un Chariot de masse M repose sans frottement sur un plan horizontal oscille sous l'action de deux ressorts identique de rigidité k fixés à la masse par l'une de leurs extrémités et à un support fixe par l'autre ; un pendule **simple** de longueur l et de m est articulé au point O.

a) Déterminer les équations de mouvement en utilisant les équations de Lagrange. L'angle θ reste faible.

b) Calculer les deux fréquences naturelles si on donne $M = 10\,kg,\ m = 0{,}5\,kg,\ l = 0{,}3\,m$ et $k = 720\,kN/m$.

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i}$$



Solution

Energies potentielles

Energie potentielle élastique des deux ressorts

$$E_{p1} = \tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

Energie potentielle de gravitation du pendule simple

$$E_{p2} = mgy_m$$

$$y_m = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta)$$

$$E_{p2} = mgl(1-\cos\theta)$$

pour θ faible $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots$

$$E_{p2} = \tfrac{1}{2}mgl\theta^2$$

Energie potentielle du système

$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

$$E_p = kx^2 + \tfrac{1}{2}mgl\theta^2$$

Energies cinétiques

Energie cinétique du chariot

$$E_{c1} = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2$$

Energie cinétique du pendule simple

$$E_{c2} = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{x} + l\dot{\theta}\right)^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}$$

autre méthode

position de m

$$\begin{cases} x_m = x + l\sin\theta \\ y_m = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow v_m = \begin{cases} \dot{x}_m = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$v_m^2 = \left(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \left(-l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2$$

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta$$

pour θ faible $\cos\theta \approx 1$

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}$$

$$E_{c2} = \tfrac{1}{2}mv_m^2$$

$$E_{c2} = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\right)$$

Energie cinétique du système

$$E_c = E_{c1} + E_{c2}$$

$$E_c = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}$$

Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0 \quad \text{avec} \quad i = 1,2$$

pour la coordonnée généralisée $q_1 = x$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2kx$$

d'où la première équation de mouvement

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + 2kx = 0 \qquad (1)$$

pour la coordonnée généralisée $q_2 = \theta$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}$$

Enseignant : BOUTCHICHA Djilali

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mgl\theta$$

d'où la deuxième équation de mouvement

$$ml\ddot{x} + ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \qquad (2)$$

sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} (M+m) & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

les solutions sont cherchées sous la forme

$$\begin{cases} x = X\cos\omega t \\ \theta = A\cos\omega t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = X\sin\omega t \\ \theta = A\sin\omega t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = Xe^{i\omega t} \\ \theta = Ae^{i\omega t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 X\cos\omega t \\ \ddot{\theta} = -\omega^2 A\cos\omega t \end{cases}$$

et en les reportant dans le système d'équations de mouvement, le système homogène suivant est obtenu:

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2(M+m) & -\omega^2 ml \\ -\omega^2 ml & mgl - \omega^2 ml^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

les solutions autres que les solutions banales $X = A = 0$ sont déduites des valeurs de ω qui annulent le déterminant de la matrice

$$\begin{vmatrix} 2k - \omega^2(M+m) & -\omega^2 ml \\ -\omega^2 ml & mgl - \omega^2 ml^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$Ml^2 m\omega^4 - (2kl^2 m + glm^2 + Mglm)\omega^2 + 2gklm = 0$$

$$\omega^4 - \left[\frac{2k}{M} + \frac{M+m}{M}\frac{g}{l}\right]\omega^2 + \frac{2k}{M}\frac{g}{l} = 0$$

avec $M = 10\,kg,\ m = 0,5\,kg,\ l = 0,3\,m$ et $k = 720 \times 10^3 N/m.$

$$\omega^4 - \left[\frac{2\times720\times10^3}{10} + \frac{10+0.5}{10}\frac{9.81}{0.3}\right]\omega^2 + \frac{2\times720\times10^3}{10}\frac{9.81}{0.3} = 0$$

$$\omega^4 - 1.4403 \times 10^5\omega^2 + 4.7088 \times 10^6 = 0$$

on pose $\lambda = \omega^2$

$$\lambda^2 - 1.4403 \times 10^5\lambda + 4.7088 \times 10^6 = 0\ ,$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 32.701, \lambda_2 = 1.44 \times 10^5$$

$$\omega_1 = 5.72\ rad/s$$

$$\omega_2 = 379.47\ rad/s$$