Chapitre 2 : Transformée de Laplace et Représentation des systèmes asservis

I. Introduction

Un système physique est une collection d'objets physiques reliés entre eux pour servir un objectif. Des exemples de système physique provenant de laboratoires, d'installations industrielles ou de services publics, d'un amplificateur électronique composé de nombreux composants, du mécanisme de gouvernance d'une turbine à vapeur ou d'un satellite de communication en orbite autour de la terre sont tous des exemples de systèmes physiques. Un système physique peut être modélisé de plusieurs manières en fonction du problème spécifique à traiter et de la précision souhaitée.

Une fois qu'un modèle physique d'un système physique est obtenu, l'étape suivante consiste à obtenir un modèle mathématique qui est la représentation mathématique du modèle physique en utilisant des lois physiques appropriées. La Fig. 2.1 représente un schéma fonctionnel du système physique.

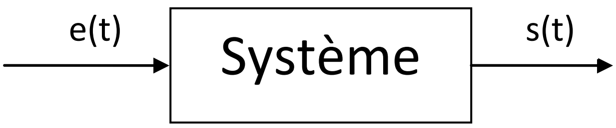
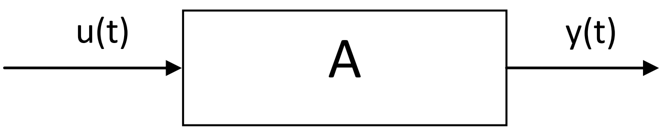


Fig. 2.1 : Schéma fonctionnel

Son état est affecté par une ou plusieurs variables, les entrées du système. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de sorties.

II. Mise en équation d'un système

Le modèle mathématique de la plupart des systèmes physiques est caractérisé par des équations différentielles. Dans le cadre de ce cours, nous nous limitons à l'étude des systèmes linéaires. Donc, les équations rencontrées seront des équations différentielles linéaires à coefficients constants.
Considérons un système quelconque A, possédant une entrée u(t) et une sortie s(t).



Si on applique un signal à l'entrée, on recueillera à la sortie un signal qui sera lié au signal d'entrée par une équation différentielle de la forme suivante.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Quand un système est linéaire, Il obéit au principe de superposition et d'homogénéité. Ce principe implique que si un modèle de système a des réponses $y_1(t)$ et $y_2(t)$ à deux entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$ respectivement, alors la réponse du système à la combinaison de ces entrées :

$$a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t)$$

est donné par la combinaison linéaire des sorties individuelles, c'est-à-dire,

$$a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

où a_1 et a_1 sont constantes.

III. Résolution des équations différentielles

La résolution de l'équation différentielle consiste à trouver la valeur de la sortie en fonction du temps pour connaitre les régimes transitoire et permanent. Il existe deux méthodes :

- Méthode classique : Consiste à résoudre l'équation différentielle décrivant ce système, c'est–à–dire trouver une réponse forcée et une réponse libre pour le système. Pour déterminer la solution, il faut considérer les points suivants :
  - L'ensemble des n conditions initiales portant sur y(t) et les (n-1) dérivées
  - L'intervalle de temps où l'on désire prendre la solution

  Mais cette méthode ne permet pas toujours de trouver une solution et peut amener à une difficulté de résolution dès que l'ordre de l'équation différentielle dépasse 2.

- Méthode opérationnelle : Basée sur le calcul opérationnel, essentiellement sur la transformée de Laplace qui permet de passer du domaine temporel avec une fonction de la variable réelle f(t) au domaine fréquentiel avec une fonction de la variable complexe F(s) dépendant de la fréquence.

$$\mathrm{L}[f(t)] = F(s), \qquad \text{avec } s = \sigma + j\omega, \qquad s\text{: opérateur de Laplace}$$

IV. Transformée de Laplace

IV. 1. Rappel

La transformée de Laplace est le remplacement de la fonction de la variable réelle f(t) par la fonction de la variable complexe s défini par :

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt; \qquad f(t) = 0 \text{ si } t < 0$$

$$\begin{cases} f(t): fonction\ origine \\ F(s): Image \end{cases}$$

IV. 2. Propriétés

- Linéarité

$$L[ax(t) + by(t)] = aX(s) + bY(s); \quad \forall a, b \ \in IR$$

- Dérivation

$$L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

$$L\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s^2X(s) - sx(t)|_{t=0} - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

- Intégration

$$L\left[\int_0^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(s)}{s}$$

- Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

- Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

V. Résolution des équations différentielles par la transformée de Laplace

Soit le système décrit par l'équation différentielle suivante.

$$a_n \frac{d^ny}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^mu}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

En appelant Y(s) et U(s) les transformées de y(t) et de u(t), si on prend la Transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle avec toutes les conditions initiales nulles :

$$a_n s^n Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \cdots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

d'où

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}\, U(s)$$

Si l'on connaît l'image U(s) de u(t), il est facile, grâce aux tables des transformées de Laplace, de revenir à l'original de Y(s).

$$\mathrm{y(t) = L^{-1}[Y(s)]}$$

Remarque :

Il faut transformer Y(s) en une somme d'éléments simples et utiliser la table des transformées de Laplace pour déterminer y(t).

V. 1. Méthode à suivre

V. 1.1. Lorsque les racines de l'équation caractéristique sont simples

1. Trouver les racines de l'équation caractéristique (celles du dénominateur)

$$a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \;\Rightarrow\; s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$$

2. Connaissant les racines, nous pouvons écrire

$$\mathrm{Y(s)} = \left(\frac{\mathrm{C_1}}{\mathrm{s - s_1}} + \frac{\mathrm{C_2}}{\mathrm{s - s_2}} + \cdots + \frac{\mathrm{C_n}}{\mathrm{s - s_n}}\right)\mathrm{U(s)}$$

pour une entrée impulsion, U(s)=1, nous aurons :

$$\mathrm{Y(s)} = \frac{\mathrm{C_1}}{\mathrm{s - s_1}} + \frac{\mathrm{C_2}}{\mathrm{s - s_2}} + \cdots + \frac{\mathrm{C_n}}{\mathrm{s - s_n}}$$

3. Déterminer les constantes C_i
   - par identification
   - par les limites

$$\mathrm{C_i} = \lim_{\mathrm{s \to s_i}} \mathrm{(s - s_i)Y(s)}$$

4. Déterminer y(t)

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n} C_i e^{s_i t}$$

V. 1.2. Exemple

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4\frac{du(t)}{dt} + 3u(t)$$

$$Y(s)[s^2 + 3s + 2] = U(s)[4s + 3]$$

$$Y(s) = \frac{4s + 3}{s^2 + 3s + 2}U(s)$$

Equation caractéristique :

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

$$s_1 = -1;\ s_2 = -2$$

pour une impulsion U(s)=1

$$Y(s) = \frac{4s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{C_1}{s + 1} + \frac{C_2}{s + 2}$$

$$C_1 = -1;\ C_2 = 5$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n} C_i e^{s_i t} = -e^{-t} + 5e^{-2t}$$

2ème méthode

$$\mathrm{C}_1 = \lim_{s \to -1}(\mathrm{s} + 1)\frac{4s + 3}{(\mathrm{s} + 1)(\mathrm{s} + 2)} = -1$$

$$\mathrm{C}_2 = \lim_{s \to -2}(\mathrm{s} + 2)\frac{4s + 3}{(\mathrm{s} + 1)(\mathrm{s} + 2)} = 5$$

V. 1.2. Lorsque les racines de l'équation caractéristique sont multiples

$$\mathrm{Y(s)} = \frac{\mathrm{A(s)}}{\mathrm{B(s)}}$$

L'équation caractéristique :

$$\mathrm{B(s)} = (\mathrm{s} - \mathrm{p})^{\mathrm{q}} - (s - p_1)(s - p_2) \ldots (s - p_{n-q})$$

On développe en fractions simples

$$Y(s) = \frac{C_q}{(s-p)^q} + \frac{C_{q-1}}{(s-p)^{q-1}} + \cdots + \frac{C_1}{s-p} + \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{K_{n-q}}{s-p_{n-q}}$$

Les constantes C_i sont calculées de la manière suivante :

$$C_q = \lim_{s \to p} [(s-p)^q \, Y(s)]$$

$$C_{q-1} = \lim_{s \to p} \left[\frac{d}{ds}((s-p)^q \, Y(s))\right]$$

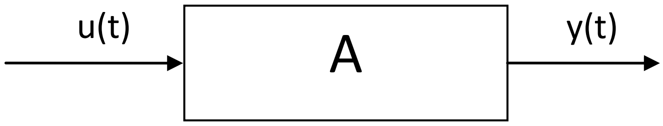
$$C_{q-k} = \lim_{s \to p} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{ds^k}((s-p)^q \, Y(s))\right]$$

la solution y(t) est donnée par :

$$y(t) = \left[\frac{C_q t^{q-1}}{(q-1)!} + \frac{C_{q-1} t^{q-2}}{(q-2)!} + \cdots + C_2 t + C_1\right] e^{pt} + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_{n-q} e^{p_{n-q} t}$$

VI. Fonction de transfert

Soit le système linéaire A possédant une entrée u(t) et une sortie y(t).



Si on applique un signal à l'entrée, on recueillera un signal de sortie qui sera lié au signal d'entrée par :

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

si on prend la transformée de Laplace des 2 membres, on aura :

$$a_n s^n Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \cdots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

Par définition, la fonction de transfert du système A est le rapport de la transformée de Laplace du signal de sortie sur la transformée de Laplace du signal d'entrée quand toutes les conditions initiales sont nulles.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$$

La fonction de transfert caractérise la dynamique du système, elle ne dépend que de ses caractéristiques physiques.

VI.1. Pôles et zéros d'un système

Soit le système représenté par sa fonction de transfert G(s)

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{\mathrm{N(s)}}{\mathrm{D(s)}}$$

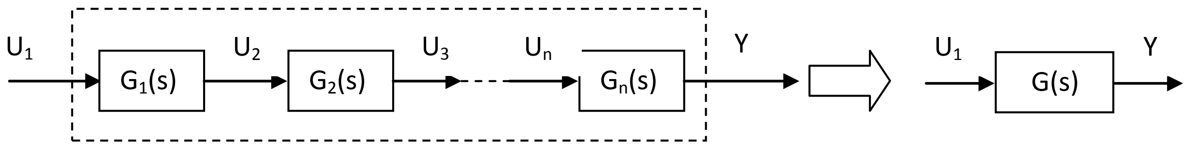
- On appelle pôles du système les racines de l'équation caractéristique (dénominateur) D(s) = 0.

- On appelle zéros du système les racines du numérateur N(s) = 0.

VI.1. Fonction de transfert d'un ensemble d'éléments

VI.1.1. Eléments en cascade

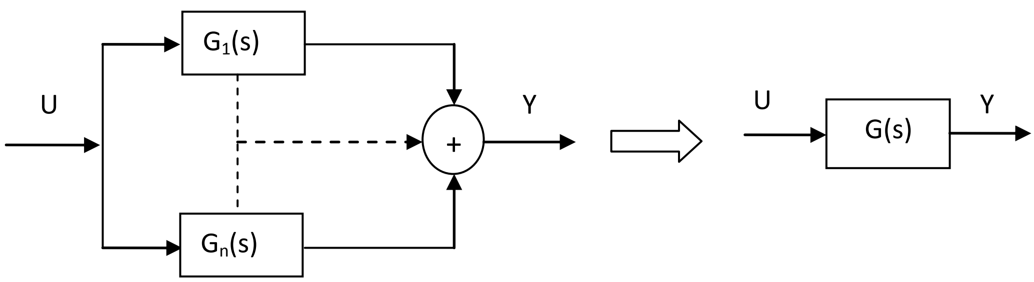
Considérons n éléments de fonction de transfert $G_1(s)$, $G_2(s)$,…, $G_n(s)$ mis en série.



$$G(s) = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U_1(s)}} = G_1(s).G_2(s) \ldots G_n(s)$$

VI.1.2. Eléments en parallèle

Considérons n éléments de fonction de transfert $G_1(s)$, $G_2(s)$,…, $G_n(s)$ mis en parallèle.



Y(s) est le résultat de la superposition des n sorties des n éléments :

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \cdots + Y_n(s)$$

$$Y(s) = \sum_i Y_i(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) + \cdots + G_n(s)U(s)$$

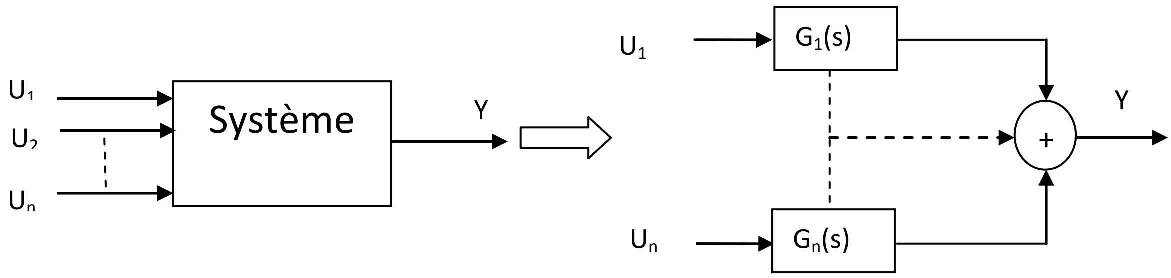
$$Y(s) = [G_1(s) + G_2(s) + \cdots + G_n(s)]U(s)$$

La fonction de transfert équivalente G(s) est donnée par :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) + \cdots + G_n(s)$$

VI.1.3. Système à n entrées

Considérons un système à n entrées et une sortie



La fonction de transfert n'a de sens qu'entre la sortie et une entrée.

Le système pourra dons se décomposer en n éléments ayant la sortie en commun et pour entrée chacune des n entrées. On calculera les fonctions de transfert $G_i(s)$ de chaque élément en supposant nulles les entrées autre que $U_i(s)$.

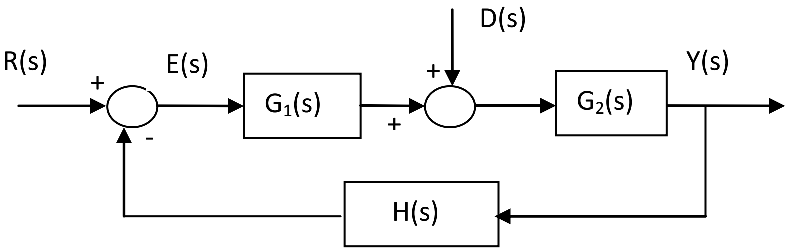
$$Y(s) = \sum_i G_i(s)U_i(s)$$

Remarque

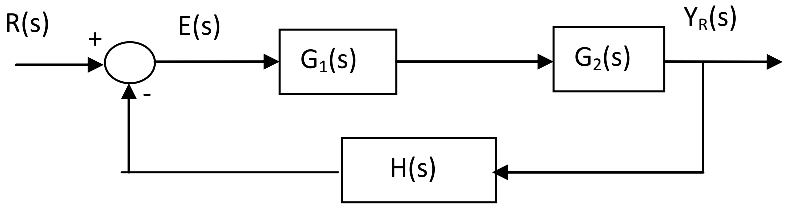
Il n'y a pas de fonction de transfert globale pour le système.

Exemple d'un système à 2 entrées

Considérons un système linéaire à deux entrées illustré ci-dessous.



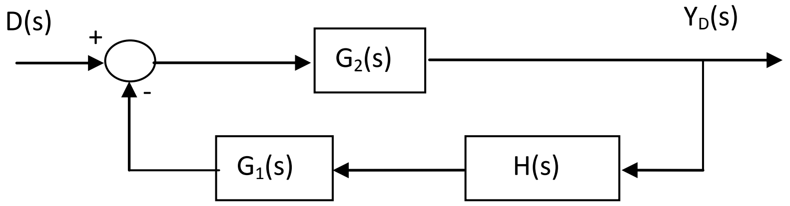
La réponse à l'entrée référence peut être obtenue en supposant D(s)=0. Le schéma fonctionnel correspondant est illustré ci-dessous.



$Y_R(s)$: sortie du système due à R(s) agissant seule.

$$Y_R(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s)$$

De même, la réponse à l'entrée D(s) est obtenue en supposant R(s)=0. Le schéma fonctionnel correspondant est illustré ci-dessous.



$Y_D(s)$: sortie du système due à D(s) agissant seule.

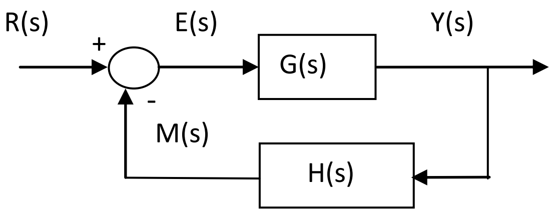
$$Y_D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s)$$

La réponse à l'application simultanée de R (s) et D (s) peut être obtenue en ajoutant les deux réponses individuelles

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} [G_1(s)R(s) + D(s)]$$

VI.2. Fonction de transfert en boucle fermée

Soit un système asservi représenté par le schéma fonctionnel suivant :



G(s) : fonction de transfert de la chaine directe

H(s) : fonction de transfert de la chaine de retour

La fonction de transfert du système globale, fonction de transfert en boucle fermée (F.T.B.F) est donnée par le rapport suivant :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

Nous avons les relations suivantes :

$$Y(s) = G(s).E(s)$$

$$E(s) = R(s) - M(s) = R(s) - H(s).Y(s)$$

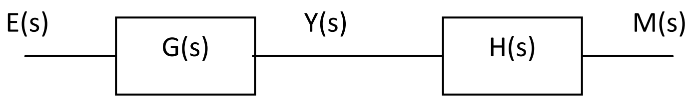
$$Y(s) = G(s)[R(s) - H(s).Y(s)]$$

$$Y(s)[1 + G(s).H(s)] = G(s).R(s)$$

$$\boxed{F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s).H(s)} = F.T.B.F}$$

VI.3. Fonction de transfert en boucle ouverte

On procède à une rupture de la chaine de retour après H(s) :

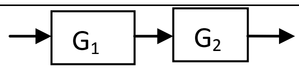
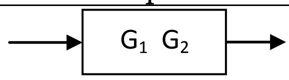
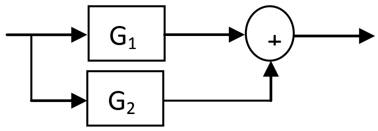
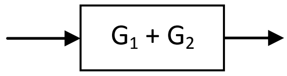
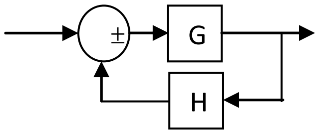
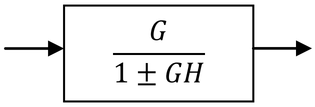
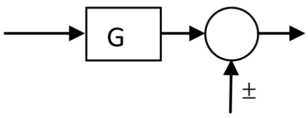
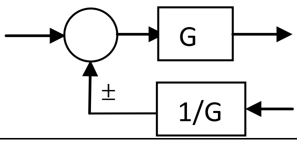
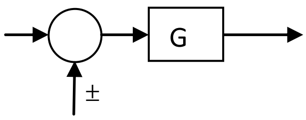
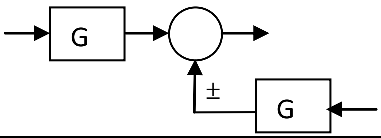
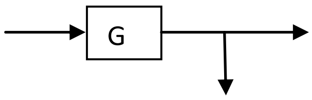
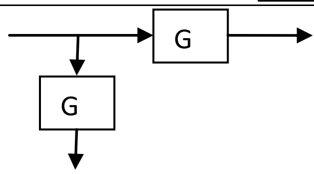


La fonction de transfert en boucle ouverte est le produit de la fonction de transfert de la chaine directe par la fonction de transfert de la chaine de retour.

$$F.T.B.O. = T(s) = G(s).H(s)$$

VII. Transformation des schémas fonctionnels

Il existe des systèmes complexes qui présentent des schémas fonctionnels compliqués où l'on rencontre, non seulement une chaîne de retour principale, mais un grand nombre de chaînes de retour secondaires. Pour simplifier ces schémas fonctionnels, il est souvent plus judicieux de déplacer les points de connexion et les comparateurs (additionneurs) selon les regles suivantes.

Règle	Schéma fonctionnel	Schéma fonctionnel équivalent
Association des éléments en cascade		
Association des éléments en parallèle		
Association de éléments avec contre réaction		
Déplacement d'un comparateur à l'amont d'un élément		
Déplacement d'un comparateur à l'aval d'un élément		
Déplacement d'un point de dérivation à l'amont d'un élément		
Déplacement d'un point de dérivation à l'aval d'un élément