UNIVERSITE des SCIENCES et de la TECHNOLOGIE d'ORAN
Faculté des mathématiques et Informatique, Département de Mathématiques

Année :2019/2020

1^e année Master Analyse mathématique et application.

Matiére : Théorie spectrale

Série de TD $N°1$

(Espace de Banach,Espace de Hilbert,Opérateurs linéaires bornés

Exercice 1. Soit l'espace vectoriel normé $C([0,1])$. Montrer que les deux normes $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|dt$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}^1([0,1])$ l'espace vectoriel (réel) des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continument dérivable. On pose pour $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$: $\|f\| = (|f(0|^2 + (\int_0^1 |f'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$.

1) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1])$.
2) Montrer que si la suite $(f_n)n \geq 1$ converge pour cette norme,alors elle converge uniformément sur $[0,1]$.
3) On pose $f_n(t) = t^n(1-t)$, $n \geq 1$. Calculer $\|f_n\|$.

Exercice 3. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$. On définit sur cet e.v une norme $\|f\|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$

1. Montrer que E muni de cet norme n'est pas complet (nous pourrons utiliser la suite de fonction $f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ 1 + n(x - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$) Déterminer le complété de $(E, \|.\|_2$
2. Soit $\Phi(f) = \int_0^1 t(1-t)f(t)dt$. Montrer que Φ est une forme linéaire continue sur E. Calculer $\|\Phi\|_2$.

Exercice 4. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbetienne d'un espace de Hilbert H .On pose

$$(x_n = e_n \ n \in \mathbb{N} \, \text{et} \, y_n = \sqrt{1-4^n} e_{2n} + 2^{-n} e_{2n+1}$$

. On désigne par X le s.e.v fermé de H engendré par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et Y le s.e.v fermé de H engendré par $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Vérifier que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont des bases hilbertiennes de X et Y
2. Montrer que $X \cap Y = 0$ et $\overline{X+Y} = H$

Exercice 5. Soit $H = L^2([-1,+1])$. Posons $F = \{\varphi \in H : \varphi \text{est paire p.p}\}$.

1. Montrer que F est un S.e.v fermé de H. Quelle est sa dimension.
2. Trouver $F^\perp$
3. Soit $\varphi \in H$ définie par $\varphi(t) = \cos t + \sin t \ t \in (-1,+1)$ déterminer $dist(\varphi, F)$

Exercice 6. Soit H un espace de Hilber complexe.

1. Montrer que si $T \in L(H)$ et si $\langle Tx, x\rangle = 0\ \forall x \in H \Rightarrow T = 0$.
2. En déduire que si $T, L \in L(H)$ telque $\langle Tx, x\rangle = \langle Lx, x\rangle\ \forall x \in H \Rightarrow T = L$

Exercice 7. Soit H un espace de Hilber complexe et $A \in L(H)$.

1. Montrer que $A = T + iS$; où T et S sont deux opérateurs auto-adjoints si et seulement si : $T = Re(A) = \frac{1}{2}(A + A^\star)$ et$S = Im(A) = \frac{1}{2i}(A - A^*)$
2. Montrer que l'opérateur A est normal si et seulement si $TS = ST$.
3. Supposons que l'opérateur A est normal. Montrer que A est inversible si et seulement si l'opérateur $B = T^2 + S^2$ l'est aussi. Remarquer que : $AA^\star = A^\star A$

Corrigés des Exercices

Exercice 3. $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $\|f\|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ 1) Montrons que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy :pour celà on montre que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_m\|_2 = 0\ n > m$.
(On a : $n > m \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$).
Alors : $\|f_n - f_m\|_2{}^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} (0-0)dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} (0 - (1 + m(x - \frac{1}{2}))^2 dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} ((n-m)(x-\frac{1}{2}))^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-1)^2 dx\ = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + n(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}) + \frac{n^3}{3}(-\frac{1}{n^3} + \frac{1}{m^3})$
$= \frac{1}{m} - \frac{n}{m^2} - \frac{1}{3n} + \frac{n^2}{3m^3} - \frac{1}{3n^2} + \frac{m}{3n^2} \mapsto 0$ (car $\frac{m}{3n^2} < \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{n}$ et $\frac{n^2}{3m^3} - \frac{n}{m^2} \to 0\, n \mapsto \infty\ m \mapsto \infty$.
Soit $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ f n'appartient pas à $C([0,1], \mathbb{R})$ et c'est une limite simple, elle ne peut être limite uniforme et ni limite pour $\|.\|_2$, alors $(f_n)_n$ n'est pas convergente dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_2)$ Alors le complété de E est bien $L^2([0,1], \mathbb{R})$.
2) Si E est muni de la norme de convergence uniforme $|\Phi(f)| = \int_0^1 t(1-t)f(t)dt| \leq \int_0^1 |t(1-t)f(t)|dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 (t(t-1)dt = \frac{1}{6}\|f\|_\infty$. Si $f_0 \equiv 1$ alors $|\Phi(f_0)| = \frac{1}{6}$alors$\|\Phi\| = \frac{1}{6}$
Si E est muni de la norme $\|.\|_2$ on utilise l'inégalité de Hölder :

$$|\Phi(f)| \leq \|f\|_2 \Big(\int_0^1 (t(t-1)^2\Big)^2 dx = \frac{1}{\sqrt{30}} \|f\|_2 \forall f \in E$$

et si $f_0(x) = \sqrt{30}x(1-x)$, $\|f_0\|_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}$ donc $\|\Phi\| = \frac{1}{\sqrt{30}}$

Exercice 5. Soit $H = L^2([-1, +1]$. Posons $F = \{\varphi \in H : \varphi estpairep.p\}$ 1) F est s.e.v facil (la somme de deux fonctions paires est paire et le produit par un scalaire d'une fonction paire reste paire)
Soit $\begin{array}{ll} \Phi : H & \to H \\ \varphi & \mapsto \varphi - \widetilde{\varphi} \end{array}$ Où $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$ Φ est une application linéaire continue $((\|\Phi\|_2)^2 = \int_{-1}^1 |\varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t)|^2 dt \leq \int_{-1}^1 (2\varphi^2(t) + 2\widetilde{\varphi}^2(t))dt \leq 4\int_{-1}^1 (\varphi^2(t))dt$. Remarquons que$F = Ker\Phi$ alors F est fermé. F est de dimension infinie car il contient la famille $\{1, t, t^2, t^3, ..., t^n, ...\}$ est libre de cardinal infini.
$F^\perp = \{\varphi \in H : \langle \varphi, \psi\rangle = 0 \forall \psi \in F\} = \{\varphi \in H; \varphi\ impairep.p\}$ car $(\int_{-1}^1 \underbrace{\varphi(t)\psi(t)}_{impaire} dt = 0)$

3) On a $H = F \oplus F^\perp$ (car $\varphi(t) = \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi(t) + \varphi(-t))}_{paire} + \underbrace{\frac{1}{2}(\varphi(t) - \varphi(-t))}_{impaire}\ \forall t \in [-1, +1]$, si

$\varphi(t) = cost + sint$, $dist(\varphi, F) = \|\varphi - p_F(\varphi)\| = \|sint\|_2 = 1$

Exercice 6. Soit H un espace de Hilbert.
1) On a $\forall x, y \in H$,

$$(a)\ \langle T(x+y), x+y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle T(x), y\rangle + \langle T(y), x\rangle = 0$$

et

$$(b)\ \langle T(x+iy), (x+iy)\rangle = -i\langle T(x), y\rangle + i\langle T(y), x\rangle = 0$$

, alors si on multilpie (a) par$i$ et (b) par $-i$ on obtient $\forall x, y \in H$ $\langle T(x), y\rangle = 0$.
2) Soient $T, L \in L(H)$, $\langle Tx, x\rangle = \langle Lx, x\rangle$ $(\forall x, y \in H)$ $\Rightarrow \langle Tx - Lx, x\rangle = \langle (T-L)x, x\rangle = 0$ $(\forall x, y \in H)$ $\Rightarrow T - L = 0 \Rightarrow T = L$
Exercice 7. 1) Si T, Ssont autoadjoints et $A = T + iS$ alors $A^\star = T - iS$;donc $A + A^\star = 2T$ et $A - A^\star = 2iS$. Réciproquement pour $A \in L(H)$, $\frac{1}{2}(A + A^\star)$ et $\frac{1}{2i}(A - A^\star)$ sont autoadjoints, et l'on a $A = T + iS$
2) Pour $A \in L(H)$,on peut écrire $A^\star A - AA^\star = (T - iS)(T + iS) - (T + iS)(T - iS) = -2i(ST - TS)$ donc $A^\star A = AA^\star \Leftrightarrow TS = ST$.
3) Si A est normal, alors $A^\star A = AA^\star = (T - iS)(T + iS) = T^2 + S^2$
i) Si A est inversible, $A^\star$ est inversible,il est en est de même pour $AA^\star = T^2 + S^2$
ii) Si $T^2 + S^2$ $((T^2 + S^2)^{-1}$ existe et continue) alors

$$((T^2 + S^2)^{-1})A^\star)A = (T^2 + S^2)^{-1}(A^\star A) = I$$

et

$$A(A^\star(T^2 + S^2)^{-1}) = (AA^\star)(T^2 + S^2)^{-1} = I$$

ce qui montre que A est inversible d'inverse $A^\star(T^2 + S^2)^{-1}$