Université des Sciences et de la Technologie D'Oran
Faculté MI - Département de Mathématiques

Master1 : Solution TD1 MMC **2019-2020**

Exercice 1
On rappelle que si F est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, son laplacien est définie par :
$\Delta F(x, y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$
Donner l'expression du Laplacien en coordonnées polaires.

Solution
F est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, son laplacien est définie par : $\Delta F(x, y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$
Donner la nouvelle expression du Laplacien par rapport aux variables r et θ ; revient à poser

$$f(r, \theta) = F(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

puis exprimer ΔF en fonction de f, r, θ et des dérivées partielles de f.
Notons $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
La matrice jacobienne de Φ en fonction de (r, θ) est

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

La matrice jacobienne de Φ^{-1} est alors

$$J^{-1} = \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

Par identification, on trouve donc

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Ainsi on utilise le théorème de composition des dérivations (on note comme usuellement de la même façon f et F) :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}.$$

De la même manière on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

On dérive ensuite une seconde fois et après simplifications, il vient :

$$\Delta F(r, \theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \tag{0.1}$$

Exercice 2
Soit $\underline{u}$ un champ vectoriel différentiable.
1. Montrer que l'on a toujours : $div(rot\,\underline{u}) = 0$
2. Donner l'expression de $\Delta\underline{u}$ en coordonnées cartésiennes.

Solution
Soit $\underline{u}$ un champ vectoriel différentiable.
1. On veut montrer que : $\text{div}(\text{rot}\,\underline{u}) = 0$.
Posons le résultat intermédiaire $\underline{v} = \text{rot}\,\underline{u} = \nabla \wedge \underline{u}$. Dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, on a par définition :

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Par ailleurs , on a par définition : $\text{div}\underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$.
On en déduit que $\text{div}(\text{rot}\,\underline{u})$ vaut :

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot}\,\underline{u}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \\ &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_2} \qquad = 0 \end{aligned} \tag{0.2}$$

2. Le Laplacien d'un vecteur est un vecteur

$$\Delta\underline{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{pmatrix} \tag{0.3}$$

Exercice 3
1. Pour $n = 3$ Ecrire explicitement l'expression $M_{ijk}Bij$, $i, j, k = \overline{1,\ n}$
2. Démontrere les identités suivantes $a_{ij}x_ix_j = a_{ji}x_ix_j$ et $(a_{ik} - a_{ki})x_ix_k = 0$.

Solution
1. $n = 3$, $i, j, k = \overline{1,\ 3}$
Dans l'expression $M_{ijk}B^{ij}$ seul k est un indice franc ; on a deux indices muets i et j ; ce sont des indices de sommation et le nombre de termes sera donc égal à $3^2 = 9$.

$$\begin{aligned} M_{ijk}B^{ij} &= M_{1jk}B^{1j} + M_{2jk}B^{2j} + M_{3jk}B^{3j} \\ &= M_{11k}B^{11} + M_{12k}B^{12} + M_{13k}B^{13} + M_{21k}B^{21} + M_{22k}B^{22} + M_{23k}B^{23} \\ &+ M_{31k}B^{31} + M_{32k}B^{32} + M_{33k}B^{33} \end{aligned}$$

2. On veut démontrer les identités suivantes
$a_{ij}x_ix_j = a_{ji}x_ix_j$ et $(a_{ik} - a_{ki})x_ix_k = 0$.
Pour la première ; effectuons un changement des indices muets en changeant i en j et j en i, il vient :

$$a_{ij}x_ix_j = a_{ji}x_jx_i = a_{ji}x_ix_j$$

Pour la deuxième

$$(a_{ik} - a_{ki})x_ix_k = a_{ik}x_ix_k - a_{ki}x_ix_k$$

Utilisons le résultat précédent $a_{ij}x_ix_j = a_{ji}x_ix_j$, il vient :

$$a_{ik}x_ix_k = a_{ki}x_ix_k$$

d'où $(a_{ik} - a_{ki})x_ix_k = 0$.

Exercice 4
Démontrer qu'un déterminant d'ordre trois relatif à une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ peut s'écrire sous la forme :

$$det[a_{ijk}] = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

Solution
On connaît l'expression d'un déterminant d'ordre trois relative à une matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, on doit montrer qu'il peut s'exprimer en fonction des permutations ε_{ijk} de la manière suivante

$$det[a_{ijk}] = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

Développons l'expression, il vient :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} &= \varepsilon_{1jk} a_{11} a_{2j} a_{3k} + \varepsilon_{2jk} a_{12} a_{2j} a_{3k} + \varepsilon_{3jk} a_{13} a_{2j} a_{3k} \\
&= a_{11}(\varepsilon_{1jk} a_{2j} a_{3k}) + a_{12}(\varepsilon_{2jk} a_{2j} a_{3k}) + a_{13}(\varepsilon_{3jk} a_{2j} a_{3k})
\end{aligned}$$

Les termes entre parenthèses sont les déterminants d'ordre deux. Le symbole de permutations (ou d'antisymétrie) ε_{1jk} a pour valeur :

$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = \varepsilon_{121} = \varepsilon_{122} = \varepsilon_{131} = \varepsilon_{133} = 0; \quad \varepsilon_{123} = 1; \quad \varepsilon_{132} = -1$$

$$\text{d'où :} \quad \varepsilon_{1jk} a_{2j} a_{3k} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

On obtient de même :

$$\varepsilon_{2jk} a_{2j} a_{3k} = a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}, \qquad \varepsilon_{3jk} a_{2j} a_{3k} = a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}$$

Regroupons avec le développement du début, on obtient :

$$\varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

C'est l'expression du développement selon sa première ligne d'un déterminant. d'ordre trois.

Exercice 5
On rappelle qu'on dit qu'un champ de vecteurs $\underline{V}$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire ϕ tel que $\underline{V} = \text{grad}(\phi)$.
Montrer que le champ

$$\underline{V}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{z}, -\frac{2y}{z}, \frac{y^2 - x^2}{z^2} \right) \quad \text{défini sur} \quad \mathbb{R}^3.$$

dérive d'un potentiel scalaire, et déterminer tous les potentiels scalaires dont il dérive.

Solution
Un champ de vecteurs $\underline{V}$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ scalaire ϕ tel que $\underline{V} = \text{grad}(\phi)$.
On doit montrer que le champ

$$\underline{V}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{z}, -\frac{2y}{z}, \frac{y^2 - x^2}{z^2} \right) \quad \text{défini sur} \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*.$$

dérive d'un potentiel scalaire.
Il est claire que $\text{rot}\underline{V}(x, y, z) = \nabla \wedge \underline{V} = 0$ et donc il existe un champ scalaire ϕ tel que $\underline{V} = \text{grad}(\phi)$.
Pour le déterminer, on écrit

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = V_1 = \frac{2x}{z}$$

et donc, par intégration, par rapport à x, on a

$$\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{z} + \phi_1(y,z),$$

D'un autre coté

$$-\frac{2y}{z} = V_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{z} + \phi_1(y,z)\right) = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}.$$

Ainsi

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = -\frac{2y}{z}$$

et donc, par intégration, par rapport à y, on a

$$\phi_1(y,z) = -\frac{y^2}{z} + \phi_2(z).$$

De la même manière on écrit :

$$\frac{y^2 - x^2}{z^2} = V_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{z} + \phi_2(z)\right) = \frac{y^2 - x^2}{z^2} + \phi_2'(z),$$

et donc $\phi_2(z) = C$, où C est une constante.

$$\boxed{\phi(x,y,z) = \frac{x^2 - y^2}{z} + C.}$$

Exercice 6

1. Soit f un champ scalaire. Trouver une expression de ∇f en coordonnées cylindriques et sphériques.
2. Soit $\underline{A}$ un champ vectoriel. Trouver l'expression de $div\underline{A}$ et $grad\underline{A}$ en coordonnées cylindriques.

Solution

Soit f une fonction scalaire de classe C^1 Trouver une expression de ∇f en coordonnées cylindriques et sphériques.
On commence par les coordonnées cylindriques,
On va exprimer les coordonnées cylindriques $(r;\theta;z)$ en fonctions des coordonnées cartésiennes $(x;y;z)$: Si $\underline{i};\underline{j};\underline{k}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$; cette base se transforme par passage en coordonnées cylindriques en la base $\underline{e}_r;\underline{e}_\theta;\underline{e}_z$

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

On peut voir la preuve donnée dans le cours utilisant les facteurs de proportionnalité comme on peut proposer une autre démonstration qui est la suivante

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan(\frac{y}{x})\ z\in\mathbb{R}\ \ x\neq 0 \text{ et } \theta\in]-\pi/2,\pi/2[$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \quad \dfrac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x^2})^2} = -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\dfrac{\sin\theta}{r}, \quad \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x^2})^2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\cos\theta}{r} \end{cases} \tag{0.4}$$

On utilise à présent le principe de composition des dérivations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\sin\theta}{r}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial r}\sin\theta + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{r}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial g}{\partial z}(r,\theta,z). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{k} \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)\underline{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\underline{k} \\
&= \frac{\partial g}{\partial r}\left(\cos\theta\underline{i} + \sin\theta\underline{j}\right) + \frac{\partial g}{\partial \theta}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\underline{i} + \frac{\cos\theta}{r}\underline{j}\right) + \frac{\partial g}{\partial z}\underline{k} \\
&= \frac{\partial g}{\partial r}\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\underline{e}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z}\underline{e}_z.
\end{aligned}$$

Finalement on trouve l'expression du gradient d'une fonction scalaire en coordonnées cylindriques.

$$\text{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\underline{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\underline{e}_z$$

On a retrouvé l'expression de la formule vu dans le cours.

Exercice 7

On considère un système de coordonnées curvilignes (cylindro-paraboliques) (u, v, z) définie par :

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2},\ y = uv,\ z = z.$$

1. Ecrivez l'expression du vecteur position $\underline{OM}(u, v, z)$.

2. Donner les vecteurs de la base $\underline{e}_u;\ \underline{e}_v;\ \underline{e}_z;$ puis vérifier que cette base est orthogonale.

3.Soit f une fonction scalaire ; Calculer grad$f$ en fonction des coordonnées u, v, z.

Solution

On considère un système de coordonnées curvilignes (cylindro-paraboliques) (u, v, z) définie par :

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2},\ y = uv,\ z = z.$$

1. Ecrivons l'expression du vecteur position $\underline{OM}(u, v, z)$.

$\underline{OM} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} = \dfrac{u^2 - v^2}{2}\underline{i} + uv\underline{j} + z\underline{k}.$

2. On va déterminer les vecteurs de la base

$$\underline{e}_u;\ \underline{e}_v;\ \underline{e}_z$$

On applique les formules relatives aux coordonnées curvilignes

$$\begin{aligned}
\underline{e}_u &= \frac{\dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial u}\right|} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(u\underline{i} + v\underline{j}\right)^t \qquad h_1 = \left|\frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_1}\right| = \sqrt{u^2+v^2} \\
\underline{e}_v &= \frac{\dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial v}\right|} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(-v\underline{i} + u\underline{j}\right)^t \qquad h_2 = \left|\frac{\partial \underline{OM}}{\partial v}\right| = \sqrt{u^2+v^2} \\
\underline{e}_z &= \frac{\dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial z}}{\left|\dfrac{\partial \underline{OM}}{\partial z}\right|} = \underline{e}_z \qquad h_3 = \left|\frac{\partial \underline{OM}}{\partial z}\right| = 1
\end{aligned}$$

Vérifions que la base trouvée ($\underline{e}_u$, $\underline{e}_v$ $\underline{e}_z$) est orthogonale.

$$\underline{e}_u \cdot \underline{e}_v = \left(\frac{1}{u^2+v^2}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underline{e}_u \cdot \underline{e}_z = \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = 0$$

3.Soit f une fonction scalaire ; Calculons grad$f$ en fonction des coordonnées u, v, z. Il suffit d'appliquer le résultat vu en cours

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\underline{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\underline{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\underline{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial f}{\partial u_1}\underline{e}_u + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\frac{\partial f}{\partial u_2}\underline{e}_v + \frac{\partial f}{\partial u_3}\underline{e}_z.$$

Exercice 8

On considère le tenseur d'ordre 2, $\underset{\sim}{T}$ tel que $[\underset{\sim}{T}] = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Ecrivez le polynôme caractéristique sous la forme

$$\left|\underset{\sim}{T} - \lambda \underset{\sim}{I}\right| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3$$

2. Vérifier que $I_1 = tr(\underset{\sim}{T})$; $I_2 = \frac{1}{2}(T_{kk}T_{mm} - T_{ij}T_{ji})$ et $I_3 = det[\underset{\sim}{T}]$
3. Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres ; retrouvez I_1, I_2 et I_3
4. Décomposer $\underset{\sim}{T}$ en parties symétrique et antisymétrique .
5. Décomposer $\underset{\sim}{T}$ partie sphérique déviatorique.

Solution

$$\text{On défini } \underset{\sim}{T} \text{ par } [\underset{\sim}{T}] = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Le polynôme caractéristique de $[\underset{\sim}{T}]$ est

$$\left|\underset{\sim}{T} - \lambda \underset{\sim}{I}\right| == \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \underbrace{7}_{I_1}\lambda^2 - \underbrace{7}_{I_2}\lambda + \underbrace{(-15)}_{I_3}$$

2. On retrouve la valeur des invariants (**??**) vu en cours

$$\begin{aligned}
I_1 &= trace(\underset{\sim}{A}) = 7 \\
I_2 &= \frac{1}{2}\left((trace\underset{\sim}{A})^2 - trace\underset{\sim}{A}^2\right) = \frac{1}{2}(T_{kk}T_{mm} - T_{ij}T_{ji}) \\
&= \frac{1}{2}[7\cdot 7 - (T_{11}T_{11} + T_{12}T_{21} + T_{13}T_{31} + T_{21}T_{12} \\
&+ T_{22}T_{22} + T_{23}T_{32} + T_{31}T_{13} + T_{32}T_{23} + T_{33}T_{33})] \\
&= \frac{1}{2}[7\cdot 7 - (3\cdot 3 + 0 = 0 + 0 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 0 + 3\cdot 3 + 2\cdot 2)] = 7 \\
I_3 &= det\underset{\sim}{A} = -15
\end{aligned}$$

3. Le polynôme caractéristique admet trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

$$\left|\underset{\sim}{T} - \lambda \underset{\sim}{I}\right| = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda - 15 = -(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0$$

Les invariants principaux s'expriment en fonction des valeurs propres :

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7,\ I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 7\ \ I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -15 \tag{0.5}$$

A chaque valeur propre λ_i correspond un vecteur propre $\underline{V}_i$ solution du système $(\underset{\sim}{T} - \lambda \underset{\sim}{I})\underline{V}_i = 0$
On trouve après calcule

$$\underline{V}_1 = (3/4, -1, 1)^t,\ \underline{V}_2 = (1, 0, 0)^t,\ \underline{V}_3 = (5/2, 1, 1)^t$$

4. Décomposons $\underset{\sim}{T}$ en partie symétrique $\underset{\sim}{T}^s$ et antisymétrique $\underset{\sim}{T}^a$:

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^s + \underset{\sim}{T}^a$$

On a

$$\underset{\sim}{T}^s = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{T} + (\underset{\sim}{T})^t\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1/2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1/2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{T}^a = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{T} - (\underset{\sim}{T})^t\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1/2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. On décompose $\underset{\sim}{T}$ en parties sphérique $\underset{\sim}{T}^{sph}$ et déviatorique $\underset{\sim}{T}^{dev}$ de la manière suivante :

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}^{sph} + \underset{\sim}{T}^{dev}$$

$$\text{avec }\ \underset{\sim}{T}^{sph} := \frac{1}{3}\left(trace\underset{\sim}{T}\right)\underset{\sim}{I} = \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 7/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{T}^{dev} := \underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{T}^{sph} = \begin{pmatrix} 2/3 & 4 & 1 \\ 0 & -1/3 & 3 \\ 0 & 3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Si u_1, u_2, u_3 sont des coordonnées curvilignes orthogonales, montrer que le Jacobien de x, y, z par rapport à u_1, u_2, u_3 est

$$J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = h_1h_2h_3$$

Solution
u_1, u_2, u_3 sont des coordonnées curvilignes orthogonales,
Déterminons le Jacobien de x, y, z par rapport à u_1, u_2, u_3 sachant que
$\underline{OM} = x\underline{\mathbf{i}} + y\underline{\mathbf{j}} + z\underline{\mathbf{k}}$ le vecteur de position d'un point M. On a :

$$\frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_1} = \frac{\partial x}{\partial u_1}\underline{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u_1}\underline{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u_1}\underline{\mathbf{k}}$$

$$\frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_2} = \frac{\partial x}{\partial u_2}\underline{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u_2}\underline{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\underline{\mathbf{k}}$$

$$\text{et } \frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_3} = \frac{\partial x}{\partial u_3}\underline{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u_3}\underline{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u_3}\underline{\mathbf{k}}$$

$$J\left(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_1} \cdot \left(\frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_3} \wedge \frac{\partial \underline{OM}}{\partial u_3}\right) = h_1\underline{e}_1 \cdot (h_2\underline{e}_2 \wedge h_3\underline{e}_3) = h_1 h_2 h_3$$

où l'on a utilisé le résultat sur le produit mixte ainsi que la définition des coefficients de proportionnalité.