Description de la cinématique d'un milieu continu

A la différence de la mécanique des solides indéformables, la mécanique des milieux continus permet de prendre en compte les déformations d'un corps et les variations de température qui accompagnent ces déformations. Dans un solide indéformable, la distance entre deux points quelconques ne peut varier avec le temps alors que dans un milieu déformable, cette distance peut évoluer. La cinématique du milieu continu a pour but d'introduire les outils mathématiques pour décrire une cinématique quelconque et ce indépendamment des forces qui l'engendrent.

0.1 Trajectoire et dérivées temporelles

Considérons un milieu continu occupant un volume V à l'instant initial ($t = 0$), par exemple une balle en caoutchouc avant son écrasement dans la paume d'une main . Cette balle peut être vue comme l'assemblage d'une infinité de petits éléments de matière appelés "**points matériels**". Chaque point matériel va se déplacer et avoir sa propre trajectoire. Cette trajectoire est définie par l'évolution de la position $\underline{x}$ de ce point matériel en fonction du temps.

Afin de distinguer deux points matériels, il faut donner un nom unique à chaque point. Généralement, on donne comme nom à chaque point matériel ses coordonnées initiales notées $\underline{X}$. Ces coordonnées dites matérielles sont constantes dans le temps, c'est donc une information intrinsèque de la particule. Par contre, les coordonnées spatiales de la particule,$\underline{x}$, évoluent dans le temps :

$$\underline{x} = \phi(\underline{X}, t) \qquad \phi \quad \text{bijective} \qquad \underline{X} = \phi^{-1}(\underline{x}, t) \tag{0.1}$$

$(\underline{x}, t)$ dit variables d'Euler et le couple $(\underline{X}, t)$ dit variables de Lagrange.

Exemple 0.1 *A titre d'exemple considérons un domaine 2D qui se déforme selon un parallélogramme. Les configurations de référence et à l'instant $t = 1$ sont présentées par la figure (0.1). La transformation, $\underline{x} = \phi(\underline{X}, t)$ est donné par*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & (1/4)(18t + 4X_1 + 6tX_2), \\ x_2 & = & (1/4)(14t + (4 + 2t)X_2), \end{array} \right. \tag{0.2}$$

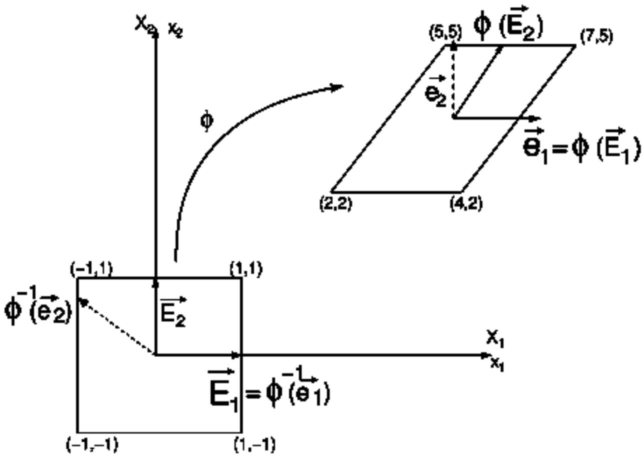

FIGURE 1 – déformation d'un carré

Une fois la transformation du milieu continu ϕ définie, il est facile de définir les notions de

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \quad \text{déplacement} \tag{0.3}$$

$$\underline{v}(\underline{X}, t) = \frac{d}{dt}\underline{u}(\underline{X}, t) \quad \text{vitesse} \tag{0.4}$$

$$\underline{a}(\underline{X}, t) = \frac{d}{dt}\underline{v}(\underline{X}, t) \quad \text{accélération} \tag{0.5}$$

La dérivée eulérienne est notée $\frac{\partial}{\partial t}$ pour ne pas la confondre avec la dérivée matérielle $\frac{d}{dt}$.

On définit la dérivée temporelle matérielle ou dérivée temporelle particulaire ou encore dérivée temporelle en suivant le mouvement par

$$\frac{Dg(\underline{x}(\underline{X}, t), t)}{Dt} = \underbrace{\frac{dg(\underline{x}(\underline{X}, t), t)}{dt}}_{\text{dér lagrangienne}} = \frac{\partial g(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial g(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial g(\underline{x}, t)}{\partial t}}_{\text{dér eulerienne}} + \underbrace{\nabla g \cdot \underline{v}}_{\text{terme d'advection}} \tag{0.6}$$

Le dernier terme est une dérivée dite convective. Afin d'illustrer le calcul des dérivées lagrangiennes et eulériennes, on peut considérer l'extension d'une barre unidimensionnelle dont la température évolue avec le temps :

Exemple 0.2 *Mouvement uni-axial, illustration des dérivées temporelles eulérienne et lagrangienne.*
On considère la transformation d'une barre, de longueur initiale 2, donnée par $x = (1+t)X$. Cette barre est soumise à une élévation de température donnée par $T = Xt^2$.
Donner les dérivées matérielles et temporelle puis retrouver la formule (0.6).

0.2 Gradient de la transformation

Pour suivre la trajectoire d'un point matériel, on obsèrve **son déplacement** $\underline{u}(\underline{X}, t)$ ou vecteur déplacement défini par

$$\underline{x}(t) = \phi(\underline{X}, t) = \underline{X} + \underline{u}(\underline{X}, t) \tag{0.7}$$

Une quantité clef dans la description de la déformation d'un corps est le gradient de la trans- formation noté $\underset{\sim}{F}$. Ce tenseur d'ordre 2 permet de relier la position relative de deux particules voisines avant et après déformation. C'est donc l'ingrédient de base pour définir la déformation d'un corps. Nous définissons le tenseur gradient de la transformation par

$$\underline{d\,x} = \underset{\sim}{F}\underline{d\,X} \quad \text{avec} \quad \underset{\sim}{F}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \tag{0.8}$$

Transformation des vecteurs de base
Calculer le gradient de transformation relatif à la transformation (0.2). Puis la Transformation des vecteurs de base dans la configuration $t = 1$.
Le gradient de la transformation se calcule par

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3t \\ 0 & 2+t \end{bmatrix} \tag{0.9}$$

On note que pour cet exemple, $\underset{\sim}{F}$ est uniforme c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du point (X_1, X_2).
les axes $\underline{E}_1$ et $\underline{E}_2$ sont transformés à l'instant $t = 1$ en $\underset{\sim}{F} \cdot \underline{E}_1$ et $\underset{\sim}{F} \cdot \underline{E}_2$. En considérant l'instant $t = 1$, on a

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{F} \cdot \underline{E}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{0.10}$$

$$\left[\, \underset{\sim}{F} \cdot \underline{E}_2 \,\right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \tag{0.11}$$

Dans notre exemple le vecteur initialement parallèle à l'axe 1 reste donc parallèle à l'axe 1 et ne change pas de taille. Par contre, le vecteur initialement parallèle à l'axe 2 tourne de 45 degrés et voit sa taille multipliée par $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Si l'on considère deux vecteurs $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$, actuellement, orientés parallèlement aux axes, on peut se demander quelle était l'orientation de ces vecteurs dans la configuration initiale. Ces orientations sont données par $\underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underline{e}_1$ et $\underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underline{e}_2$. En considérant l'instant $t = 1$, on a

$$\left[\, \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underline{e}_1 \,\right] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{0.12}$$

$$\left[\, \underset{\sim}{F}^{-1} \cdot \underline{e}_2 \,\right] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \tag{0.13}$$

0.3 Tenseurs essentiels à la déformation

La section précédente a introduit le tenseur gradient de la transformation, $\underset{\sim}{F}$. Ce tenseur est la dérivée des positions actuelles par rapport aux positions initiales. Nous allons montrer que ce tenseur n'est pas une bonne mesure de déformation. En revanche, à partir de ce tenseur nous allons bâtir deux tenseurs de déformation. Considérons un corps se déplaçant de manière rigide. Ce mouvement s'écrit :

$$\underline{x} = \underset{\sim}{R}(t).\underline{X} + \underline{c}(t) \tag{0.14}$$

$\underset{\sim}{R}$ est un tenseur orthogonal qui repésente une rotation et $\underline{c}$ vecteur translation. On vérifie dans ce cas que $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R}$.
Autrement dit pour un mouvement de corps rigide, le tenseur $\underset{\sim}{F}$ n'est pas nul et est égal au tenseur de rotation. Clairement, le tenseur $\underset{\sim}{F}$ n'est donc pas une bonne mesure de déformation puisqu'il est non nul pour des transformations n'impliquant aucune déformation.

Pour arriver à la définition d'un tenseur de déformation, écrivons le changement de produit scalaire entre deux vecteurs élémentaire $\underline{dX}_1$ et $\underline{dX}_2$ lorsqu'ils se transforment en $\underline{dx}_1$ et $\underline{dx}_2$. Exprimons le produit scalaire des vecteurs après déformation en fonction des vecteurs avant déformation :

$$\underline{dx}_1 \cdot \underline{dx}_2 = (\underset{\sim}{F} \cdot \underline{dX}_1) \cdot (\underset{\sim}{F} \cdot \underline{dX}_2) = \underline{dX}_1 \cdot \underbrace{(\underset{\sim}{F}^t . \underset{\sim}{F})}_{\underset{\sim}{C}} \cdot \underline{dX}_2 \tag{0.15}$$

On définit ainsi le tenseur $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^t . \underset{\sim}{F}$ appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green droit. Il s'agit d'un tenseur symétrique du deuxième ordre dit matériel car il opère sur des vecteurs matériels.
On définit ainsi le tenseur $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{F} . \underset{\sim}{F}^t$ appelé tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche.

Exemple 0.3 *Pour la transformation (0.2), déterminer le tenseur $\underset{\sim}{C}$.*

Le tenseur $\underset{\sim}{F}$ joue un rôle important dans la définition des tenseurs de déformation. Ce tenseur fait passer un vecteur élémentaire

$\underline{dX}$ de la configuration initiale à un vecteur $\underline{dx}$ de la configuration actuelle. Ce passage peut être décomposé en une opération dite d'extension suivie d'une opération de rotation. Cette terminologie deviendra claire dans la suite. D'un point de vue purement mathématique, on peut montrer que tout tenseur d'ordre deux peut s'écrire comme le produit d'un tenseur orthogonal, $\underset{\sim}{R}$, et d'un tenseur symétrique $\underset{\sim}{U}$.

Théorème 0.1 *(Décomposition polaire)*
Pour tout tenseur $\underset{\sim}{F}$ inversible, il existe deux tenseurs symétriques définis positifs $\underset{\sim}{U}$ et $\underset{\sim}{V}$ uniques et un unique tenseur orthogonal $\underset{\sim}{R}$ tels que

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{R} . \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{V} . \underset{\sim}{R} \tag{0.16}$$

Idée de la preuve
On part du tenseur symétrique $\underset{\sim}{C}$

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^t . \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{U}^t . \underbrace{\underset{\sim}{R}^t \underset{\sim}{R}}_{\underset{\sim}{I}} . \underset{\sim}{U} \tag{0.17}$$

$$\text{car; } \underset{\sim}{R} . \underset{\sim}{R}^t = \underset{\sim}{F} . \underset{\sim}{U}^{-1} . \underset{\sim}{U}^{-t} \underset{\sim}{F}^t = \underset{\sim}{F} . \underset{\sim}{U}^{-2} . \underset{\sim}{F}^t = \underset{\sim}{F} . \underset{\sim}{C}^{-1} . \underset{\sim}{F}^t = \underset{\sim}{F} . \underset{\sim}{F}^{-1} . \underset{\sim}{F}^{-t} . \underset{\sim}{F}^t = \underset{\sim}{I} \tag{0.18}$$

$\underset{\sim}{C}$ est aussi défini positif

$$\forall \underline{a} \neq 0 \ \underline{a}\underset{\sim}{C}\underline{a} = a_i F^t_{ik} F_{kj} a_j = (\underset{\sim}{F}\underline{a}).(\underset{\sim}{F}\underline{a}) > 0 \tag{0.19}$$

Le tenseur $\underset{\sim}{U}$ est donc la racine carrée du tenseur $\underset{\sim}{C}$. Pour prendre la racine d'un tenseur, il faut l'écrire sous une forme dite propre :

$$\underset{\sim}{C} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \underline{N}_i \otimes \underline{N}_i \tag{0.20}$$

Les λ_i^2 et $\underline{N}_i$ sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres de $\underset{\sim}{C}$. Le tenseur $\underset{\sim}{U}$ s'écrit alors en prenant la racine carrée des valeurs propres

$$\underset{\sim}{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \underline{N}_i \otimes \underline{N}_i \tag{0.21}$$

Exemple 0.4 *Pour la transformation (0.2), en $t = 1$ déterminer $\underset{\sim}{U}$ ensuite $\underset{\sim}{R}$.*