

## Chapitre 2                      Particule dans un potentiel stationnaire

### 2.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons résoudre l'équation de Schrödinger dans des cas dits stationnaires. Il s'agit de situations où le potentiel ne dépend pas explicitement du temps (La même expérience réalisée à des instants différents donnerait le même résultat). On verra que l'équation de Schrödinger prend une autre forme et sa solution est dite 'solution stationnaire'. De plus, on traitera des modèles généralement à une dimension (à l'exception de la boîte cubique) dans lesquels les difficultés purement mathématiques seront minimisées au maximum. Ces exemples, même très simples du point de vue mathématique nous permettront de comprendre le comportement d'une particule en mécanique quantique et de faire des comparaisons avec les prévisions de la mécanique classique.

### 2.2 Equation de Schrödinger indépendante du temps :

L'équation de Schrödinger dans le cas général a été introduite au chapitre précédent (eq(1.44)). On rappelle son expression :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(r, t) + V(r, t) \psi(r, t)$$

On se propose de réécrire cette équation dans le cas stationnaire. C'est-à-dire dans le cas où :

$$V(r, t) = V(r)$$

Dans ce cas la fonction d'onde décrivant le système est le produit d'une fonction qui ne dépend que de  $r$  par une fonction qui ne dépend que de  $t$ . On écrit :

$$\psi(r, t) = \varphi(r) \chi(t)$$

En insérant cette expression dans l'équation de Schrödinger on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(r) \chi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi(r) \chi(t) + V(r) \varphi(r) \chi(t)$$

Et puisque l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial t}$  n'agit que sur  $\chi(t)$ , et le Laplacien n'agit que sur  $\varphi(r)$

$$i\hbar \varphi(r) \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \chi(t) \Delta \varphi(r) + V(r) \varphi(r) \chi(t)$$

En divisant par  $\varphi(r) \chi(t)$

$$i\hbar \frac{1}{\chi(t)} \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(r)} \Delta \varphi(r) + V(r)$$

On obtient une expression qui ne dépend que de  $t$  et une autre qui ne dépend que de  $r$ . Ces deux expressions sont égales quelles que soient les valeurs de  $r$  et de  $t$ . Ceci n'est possible que si elles sont toutes les deux égales à une même constante. On notera cette constante  $E$ . L'équation de Schrödinger nous donnera donc deux équations indépendantes :

$$i\hbar \frac{1}{\chi(t)} \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = E \quad (2.1)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\varphi(r)} \Delta \varphi(r) + V(r) = E \quad (2.2)$$

La première est une équation différentielle à variables séparables qui s'intègre facilement. Sa solution est :

$$\chi(t) = A \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) \quad (2.3)$$

La deuxième devient : 
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r)\right)\varphi(r) = E\varphi(r) \quad (2.4)$$

Ou simplement :  $H\varphi(r) = E\varphi(r)$

où  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r)$  s'appelle l'hamiltonien du système, et  $\varphi(r)$  la solution stationnaire.

L'équation (2.4) s'écrit aussi :

$$\Delta \varphi(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r))\varphi(r) = 0 \quad (2.5)$$

Cette équation s'appelle équation de Schrödinger indépendante du temps (ou équation de Schrödinger par abus de langage).

Si on connaît l'expression de  $V(r)$ , on peut déterminer  $\varphi(r)$ . La solution générale sera donc,

$$\psi(r, t) = \varphi(r) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$$

Dans ce chapitre nous allons étudier des problèmes à une dimension et l'équation (2.5) devient :

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))\varphi(x) = 0 \quad (2.6)$$

### 2.3 Conditions de continuité aux interfaces:

On sait qu'en électromagnétisme, les champs électrique et magnétique satisfont à des conditions de continuité à l'interface entre deux milieux de propriétés électromagnétiques différentes. De la même manière, en mécanique quantique on impose les deux conditions suivantes :

Condition de continuité de la fonction d'onde :  $\varphi(x)$  est partout continue.

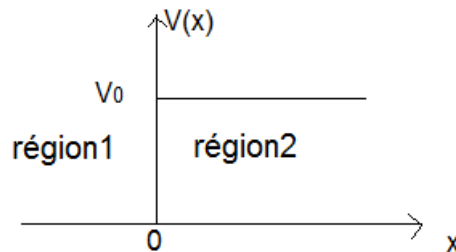
Condition de continuité de la dérivée de la fonction d'onde :  $\frac{d}{dx}\varphi(x)$  est continue partout sauf aux points où le potentiel est infini.

## 2.4 Marche de potentiel :

Considérons une particule d'énergie  $E$  qui vient de la gauche vers la droite. Elle rencontre en  $x = 0$  une marche de potentiel  $V(x)$  (figure(2.1)), telle que :

$$V(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \quad (\text{région1})$$

$$V(x) = V_0 \text{ pour } x \geq 0 \quad (\text{région2})$$



Fig(2.1) marche de potentiel

On écrit l'équation de Schrödinger indépendante du temps (eq(2.6)) :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\varphi(x) = 0$$

Résolution dans la région1 :

Dans la région1  $V(x) = 0$

$$\text{On pose : } k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (2.7)$$

$$\text{et on obtient, } \frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} + k_1^2\varphi_1(x) = 0 \quad (2.8)$$

Cette équation a pour solution :

$$\varphi_1(x) = A_1 \exp(ik_1x) + B_1 \exp(-ik_1x) \quad (2.9)$$

C'est la superposition de deux ondes, l'une de vecteur d'onde  $k_1$  se propageant de la gauche vers la droite (onde incidente) et l'autre de vecteur d'onde  $-k_1$  se propageant selon la direction opposée (onde réfléchie).

Résolution dans la région2 :

Dans la région2,  $V(x) = V_0$ . L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \varphi_2(x) = 0 \quad (2.10)$$

Deux cas se présentent :

**1<sup>er</sup> cas :**  $E > V_0$

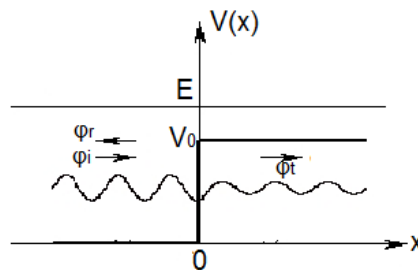
Dans ce cas, on pose  $k_2^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$  (2.11)

et on obtient :  $\frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} + k_2^2 \varphi_2(x) = 0$  (2.12)

Dont la solution est :

$$\varphi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x) \quad (2.13)$$

Par hypothèse, il n'ya pas d'onde venant de la droite ce qui impose  $B_2 = 0$  et on reconnait l'onde transmise (fig(2.2)) :  $\varphi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x)$  (2.14)



Fig(2.2) Marche de potentiel ( $E > V_0$ )

On définit les coefficients de réflexion  $R$  et  $T$  :

$$R = \frac{\text{densité de courant réfléchi}}{\text{densité de courant incident}}$$

$$T = \frac{\text{densité de courant transmis}}{\text{densité de courant incident}}$$

En mécanique quantique, on montre que la densité de courant est donnée par:

$$J = \frac{\hbar}{2mi} (\varphi^* \nabla \varphi - \varphi \nabla \varphi^*) \quad (2.15)$$

Nous allons utiliser cette expression pour calculer les densités de courant dans les différentes zones, ce qui nous permettra de déduire les coefficients de réflexion et de transmission.

Dans la région1 on a :

$$J_1 = \frac{\hbar}{2mi} (\varphi_1^* \nabla \varphi_1 - \varphi_1 \nabla \varphi_1^*)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^* \nabla \varphi_1 &= (A_1^* \exp(-ik_1 x) + B_1^* \exp(ik_1 x)) \frac{d}{dx} (A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x)) \\ &= ik_1 |A_1|^2 - ik_1 A_1^* B_1 \exp(-2ik_1 x) + ik_1 A_1 B_1^* \exp(2ik_1 x) - ik_1 |B_1|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \nabla \varphi_1^* &= (A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x)) \frac{d}{dx} (A_1^* \exp(-ik_1 x) + B_1^* \exp(ik_1 x)) \\ &= -ik_1 |A_1|^2 + ik_1 A_1 B_1^* \exp(2ik_1 x) - ik_1 A_1^* B_1 \exp(-2ik_1 x) + ik_1 |B_1|^2 \end{aligned}$$

$$J_1 = \frac{k_1 \hbar}{m} (|A_1|^2 - |B_1|^2) \quad (2.16)$$

L' expression(2.16) montre que la densité de courant dans la zone 1 se compose de deux parties : une incidente et une autre réfléchie. Et par suite le coefficient de réflexion devient :

$$R = \frac{\frac{k_1 \hbar}{m} |A_1|^2}{\frac{k_1 \hbar}{m} |B_1|^2} = \frac{|A_1|^2}{|B_1|^2} \quad (2.17)$$

Dans la région2 la fonction d'onde est :  $\varphi_2(x) = A_2 \exp(ik_2 x)$

La densité de courant est donc :

$$J_2 = \frac{\hbar k_2}{m} |A_2|^2 \quad (2.18)$$

$$\text{Et } T = \frac{k_2}{k_1} \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2 \quad (2.19)$$

Pour calculer  $R$  et  $T$ , il faut utiliser les conditions de continuité (ou conditions aux limites). Au point  $x = 0$  on écrit donc :

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$$

$$\text{et } \varphi_1'(0) = \varphi_2'(0)$$

Ce qui donne :

$$A_1 + B_1 = A_2$$

et  $ik_1A_1 - ik_1B_1 = ik_2A_2$

Et par suite :

$$R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \quad (2.20)$$

$$T = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)^2 \frac{k_2}{k_1} \quad (2.21)$$

D'après l'équation (2.20), la mécanique quantique prévoit une possibilité de réflexion de la particule même lorsque l'énergie de cette particule est supérieure à la valeur du potentiel dans la région 2 (autrement dit, la valeur de l'énergie potentielle de la particule dans la zone 2). Ce résultat est contradictoire avec la mécanique classique. Par ailleurs on vérifie bien que  $R + T = 1$  ce qui veut dire que la particule est soit réfléchi soit transmise.

**2<sup>eme</sup> cas :  $E < V_0$  :**

On note dans ce cas  $\varphi_3(x)$  la fonction d'onde qui décrit l'état de la particule dans la région 2. L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\frac{d^2\varphi_3(x)}{dx^2} - \rho^2\varphi_3(x) = 0 \quad (2.22)$$

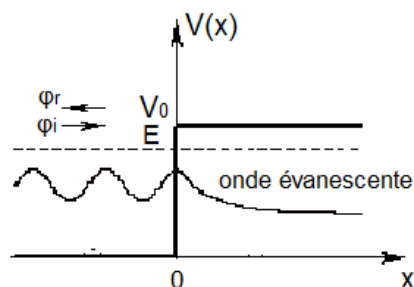
$$\text{Avec : } \rho^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

$$\text{Et sa solution est : } \varphi_3(x) = A_3 \exp(-\rho x) + B_3 \exp(\rho x) \quad (2.23)$$

Nous avons une particule qui se trouve dans une zone qui s'étend à l'infini. Or à l'infini, le terme «  $\exp \rho x$  » devient infini, et la fonction n'est plus de carré sommable, ce qui est inacceptable physiquement. La constante  $B_3$  est donc forcément nulle et la solution devient :

$$\varphi_3(x) = A_3 \exp(-\rho x)$$

Cette solution s'appelle 'onde évanescente' (voir figure (2.3)).



Fig(2.3) Marche de potentiel ( $E < V_0$ )

Calculons la densité de probabilité de présence de la particule dans la région2.

$$\frac{dP(x)}{dx} = |\varphi_3(x)|^2 = |A_3|^2 \exp(-2\rho x) \quad (2.24)$$

La densité de probabilité de présence de la particule dans la région2 est non nulle! Elle diminue jusqu'à devenir négligeable après une distance égale à  $\frac{1}{\rho}$  qu'on appelle 'la portée de l'onde évanescente'. Encore une fois, les résultats obtenus par la mécanique quantique n'étaient pas prévus par la mécanique classique. La particule peut accéder à une région où le potentiel est supérieur à son énergie cinétique.

Le courant de probabilité dans la région2 est donné par :

$$J_3 = \frac{\hbar}{2mi} (\varphi_3^* \nabla \varphi_3 - \varphi_3 \nabla \varphi_3^*)$$

$$J_3 = 0 \quad (2.25)$$

$$\text{d'où : } T = 0 \quad (2.26)$$

$$\text{et par suite } R = 1 \quad (2.27)$$

La réflexion est totale. Mais on avait montré que la densité probabilité de présence de la particule dans la région2 est non nulle (eq(2.24)). Y'a-t-il une contradiction entre (eq(2.26)) et (eq(2.24)) ?

Pour répondre à cette question, on va calculer le rapport  $\frac{B_1}{A_1}$ . En utilisant les conditions de raccordement à la frontière entre les deux régions. On trouve :

$$A_1 + B_1 = A_3$$

$$ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = -\rho A_3$$

Les équations ci-dessus donnent :

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 - i\rho}{k_1 + i\rho} \quad (2.28)$$

L'expression (2.28) est le rapport de deux nombres complexes conjugués l'un de l'autre. En posant  $\rho = Z \sin(\theta)$  et  $k_1 = Z \cos(\theta)$ , on obtient :

$$\frac{B_1}{A_1} = \exp(-2i\theta) \quad \Rightarrow \quad B_1 = A_1 \exp(-2i\theta) \quad (2.29)$$

L'expression (2.29) montre qu'il apparait un retard de phase entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. En effet, l'onde incidente pénètre à l'intérieur de la zone2 ensuite elle rebrousse chemin ce qui explique le fait que  $\rho(x) \neq 0$ .

Dans la région 2 il y a deux courants. L'un positif de transmission et l'autre négatif de réflexion. Ces deux courants se compensent exactement, d'où  $J_3 = 0$ . Il n'y a donc pas de contradiction.

En conclusion, la mécanique quantique prévoit une pénétration de la particule dans la région 2 dans le cas où  $E < V_0$ . Cependant, la réflexion est totale (puisque  $R = 1$ ) mais elle se fait à l'intérieur de la Région 2. Ce résultat n'était pas prévisible par la mécanique classique pour laquelle la région 2 est strictement interdite.

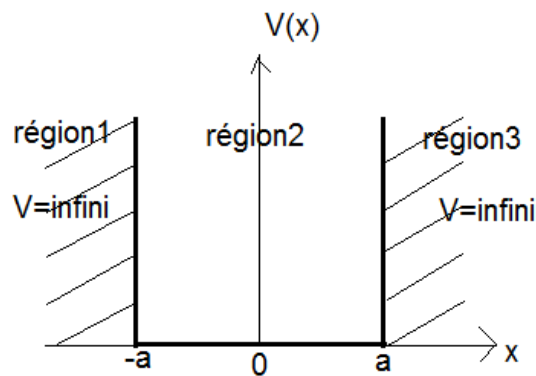
## 2.5 Puits de potentiel infini symétrique:

Soit une particule qui se trouve dans une région où le potentiel est défini par :

$$V(x) = 0 \quad \text{si} \quad -a < x < a$$

$$V(x) = \infty \quad \text{si} \quad x < -a \quad \text{ou} \quad x > a$$

L'espace se divise en trois régions (voir figure (2.4)).



Fig(2.4) Puits de potentiel infini symétrique

Dans la région 1 et la région 3, le potentiel est infini. Dans ce cas, la solution de l'équation de Schrödinger est nulle. En fait, la particule n'a aucune chance de se trouver dans une région où le potentiel est infini. On écrit :

$$\varphi_1(x) = \varphi_3(x) = 0 \quad (2.30)$$

Dans la région 2,  $V(x)$  est symétrique par rapport à l'origine ( $x = 0$ ). Dans ce cas, la fonction d'onde  $\varphi(x)$  qui décrit la particule est nécessairement paire ou impaire.

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \quad (2.31)$$

Et en introduisant le vecteur d'onde  $k$  :



$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + k^2\varphi(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Et les solutions de l'équation (2.31) sont :

$$\varphi_p(x) = A \cos(kx) \quad \text{pour les fonctions paires} \quad (2.32)$$

$$\varphi_i(x) = B \sin(kx) \quad \text{pour les fonctions impaires} \quad (2.33)$$

En utilisant (2.30), les conditions de continuité donnent :

$$\varphi(a) = \varphi(-a) = 0 \quad (2.31)$$

Ceci donne dans le cas des fonctions paires  $\cos(k_p a) = 0 \Rightarrow k_p = (2n+1)\frac{\pi}{2a}$  d'où

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4a^2}$$

Qui s'écrit encore :

$$E_p = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{N^2 \pi^2}{4a^2} \quad \text{avec} \quad N \text{ impair} \quad (2.32)$$

Dans le cas des fonctions impaires,  $\sin(k_i a) = 0 \Rightarrow k_i = \frac{n\pi}{a} = \frac{2n\pi}{2a}$  d'où  $E_i = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(2n)^2 \pi^2}{4a^2}$

Qui s'écrit encore :

$$E_i = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{N^2 \pi^2}{4a^2} \quad \text{avec} \quad N \text{ pair} \quad (2.33)$$

L'énergie est donnée par la même expression dans le cas des fonctions paires et impaires (expressions (2.32) et (2.33)). On écrit alors :

$$E_N = \frac{N^2 \hbar^2 \pi^2}{8ma^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N \text{ impair pour les fonctions paires} \\ N \text{ pair pour les fonctions impaires} \end{cases} \quad (2.34)$$

Pour calculer les constantes  $A$  et  $B$  on normalise la fonction d'onde. On écrit pour les fonctions paires par exemple :

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a |\varphi_p(x)|^2 dx = 1 &\Rightarrow |A|^2 \int_{-a}^a \cos^2 kx = 1 \Rightarrow |A|^2 \int_{-a}^a \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx = 1 \\ &\Rightarrow |A|^2 \left( \int_{-a}^a \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos(2 \frac{N\pi}{2a} x) dx \right) = 1 \end{aligned}$$

La deuxième intégrale s'annule et on obtient :

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Le même calcul donne le même résultat pour les fonctions impaires.

L'expression générale des fonctions d'ondes s'écrit :

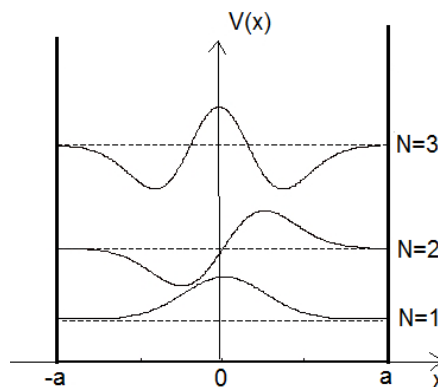
Pour les fonctions paires :

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{N\pi}{2a}\right)x \quad \text{avec } N \text{ impair} \quad (2.37)$$

Pour les fonctions impaires :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{N\pi}{2a}\right)x \quad \text{avec } N \text{ pair} \quad (2.38)$$

Dans la figure (2.5) on représente les trois premières fonctions d'onde.



Fig(2.5) Représentation des trois premières fonctions d'onde

Remarque:

On remarque que l'énergie est quantifiée contrairement à ce que prévoit la mécanique classique.

De plus,  $N$  est forcément non nul, sinon on aurait une fonction d'onde nulle partout et par conséquent une densité de probabilité de présence nulle partout ce qui est contradictoire avec notre hypothèse (particule enfermée dans un puits de potentiel). Il en résulte que l'énergie la plus basse (niveau fondamental) correspond à  $N = 1$  et elle n'est pas nulle! Ce résultat n'était pas prévisible par la mécanique classique. De toutes les façons, on sait qu'une énergie nulle n'aurait pas été possible car elle serait en contradiction avec le principe d'incertitude de Heisenberg.

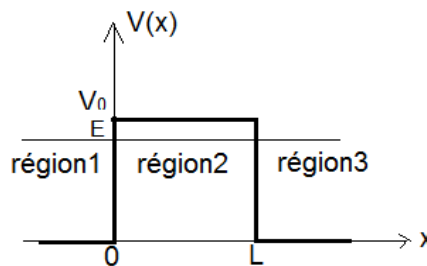
Quand on cherche à localiser la particule (en faisant diminuer la valeur de «  $a$  »), l'énergie cinétique prend une valeur minimale qu'on appelle 'énergie de localisation'. Cette énergie minimale (dite de localisation) est d'autant plus importante que la valeur de  $a$  diminue.

On remarque la présence de nœuds qui sont des points où la fonction d'onde s'annule. Ce sont donc des points où la particule n'a aucune chance de s'y trouver. Ceci non plus n'est pas prévisible par la mécanique classique qui considère que la particule peut accéder à tous les points entre  $-a$  et  $a$ .

## 2.6 Barrière de potentiel, effet tunnel :

Lorsque nous avons étudié la marche de potentiel, nous avons montré que la mécanique quantique prévoit une pénétration de la particule dans une zone où le potentiel est supérieur à son énergie. Mais sa densité de probabilité de présence diminue jusqu'à devenir négligeable. Dans ce paragraphe, nous allons voir ce qui se passe dans le cas d'une barrière de potentiel de dimension finie  $L$  définie par (figure (2.8)) :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ V_0 & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{si } x > L \end{cases}$$



Fig(2.8) Barrière de potentiel

Nous allons considérer le cas  $E < V_0$ . La mécanique classique prévoit une réflexion totale de la particule en  $x = 0$ .

L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)) = 0 \quad (2.52)$$

La solution de cette équation dans les trois zones est :

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \quad (2.53)$$

$$\varphi_2(x) = A_2 e^{\rho x} + B_2 e^{-\rho x} \quad (2.54)$$

$$\varphi_3(x) = A_3 e^{ikx} \quad (2.55)$$

Avec :  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

$$\text{Et } \rho = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

Les équations de continuité aux points  $x = 0$  et  $x = a$  donnent :

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (2.56)$$

$$\varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) \Rightarrow ikA_1 - ikB_1 = \rho A_2 - \rho B_2 \quad (2.57)$$

$$\varphi_2(a) = \varphi_3(a) \Rightarrow A_2 e^{\rho a} + B_2 e^{-\rho a} = A_3 e^{ika} \quad (2.58)$$

$$\varphi'_2(a) = \varphi'_3(a) \Rightarrow \rho A_2 e^{\rho a} - \rho B_2 e^{-\rho a} = ikA_3 e^{ika} \quad (2.59)$$

Le coefficient de transmission à travers la barrière est donné par :

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2$$

De (2.56) et (2.57) on élimine  $B_1$ , ce qui donne :

$$2A_1 ik_1 = A_2(\rho + ik) - B_2(\rho - ik) \quad (2.60)$$

De (2.58) et (2.59), on tire  $A_2$  et  $B_2$  :

$$A_2 = \frac{A_3(\rho + ik)}{2\rho e^{\rho a}} e^{ika}$$

$$B_2 = \frac{A_3(\rho - ik)}{2\rho e^{-\rho a}} e^{ika}$$

On remplace  $A_2$  et  $B_2$  dans (2.60) :

$$\begin{aligned} 2ik_1 A_1 &= \frac{A_3}{2\rho} \left( \frac{(\rho + ik)^2}{e^{\rho a}} - \frac{(\rho - ik)^2}{e^{-\rho a}} \right) e^{ika} \\ &= \frac{A_3}{2\rho} \left( (\rho^2 - k^2) (-2sh(\rho a) + 2i\rho k(2ch(\rho a))) \right) e^{ika} \end{aligned}$$

Et en élevant au carré la norme du rapport de  $A_3$  par  $A_1$  :

$$\left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{16\rho^2 k^2}{4(\rho^2 - k^2)^2 sh^2 \rho a + 16\rho^2 k^2 ch^2(\rho a)}$$

En remplaçant  $\rho^2$  et  $k^2$  par leur expression, et en utilisant la relation :  $ch^2 x - sh^2 x = 1$

On obtient l'expression du facteur de transmission en fonction de  $E$  et de  $V_0$  :

$$T = \frac{4 \frac{\rho^2}{k^2}}{\left(\frac{\rho^2}{k^2} + 1\right)^2 \operatorname{sh}^2(\rho a) + 4 \frac{\rho^2}{k^2}} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \operatorname{sh}^2(\rho a)}$$

Ainsi, il apparaît une probabilité de transmission non nulle à travers la barrière lorsque  $E < V_0$ . L'onde transmise est le prolongement de l'onde évanescente. Ce phénomène s'appelle « effet tunnel ». Il a été observé expérimentalement et ne peut d'aucune manière s'expliquer par la mécanique classique.