UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS - MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHS-INFORMATIQUE

# THEORIE SPECTRALE DES OPERRATEURS DANS LES ESPACES DE HILBERT

Manuscrit préparé par : B. BENDOUKHA

Janvier 2020

# Table des matières

# Chapitre 1

# SPECTRE D'UN OPÉRATEUR

## 1.1 Définition et différentes composantes du spectre

Dans tout ce chapitre, les espaces considérés sont des espaces de Hilbert séparables sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. De plus, le symbole $I$ désignera l'opérateur unité dans l'espace de Hilbert $H$. Si $A$ est un opérateur linéaire dans un Hilbert $H$, on notera :

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in H : A(x) = 0\} \quad \longrightarrow \quad \text{le noyau de} A$$

et

$$\mathcal{R}(A) = \{A(x) : x \in H\} \quad \longrightarrow \quad \text{l'image de} A$$

**Définition 1.1.1** *Un opérateur linéaire $A : H \longrightarrow H$ est dit borné s'il est défini dans tout $H$ et si*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \left\| \frac{A(x)}{\|x\|} \right\| < +\infty.$$

*On note $\mathcal{B}(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $H$ dans $H$*[1].

**Définition 1.1.2** *Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire borné. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est dit régulier pour l'opérateur $A$ si, l'opérateur $(A - \lambda.I)^{-1}$ existe et est borné de $H$ dans $H$. L'ensemble des points réguliers de $A$ est noté $\rho(A)$ et on l'appelle ensemble résolvant de $A$. Le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble résolvant de $A$ est appelé spectre de $A$ et on le note $\sigma(A)$ $(\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A))$.*

**Remarque.** Soit $\lambda \in \sigma(A)$ alors, d'après le théorème de Banach sur l'opérateur inverse, l'opérateur $(A - \lambda I_H)$ n'est pas une bijection de $H$ dans $H$ et donc, on a l'une des trois possibilités suivantes :

**Situation 1.** L'opérateur $(A - \lambda.Id)$ n'est pas injectif. Ce qui équivaut à l'existence d'un vecteur non nul $x_\lambda$ de $H$ tel que : $A(x_\lambda) = \lambda.x_\lambda$. Dans ce cas, $\lambda$ est dite valeur propre de $A$ et le vecteur $x_\lambda$ est dit vecteur propre de $A$, associé à la valeur propre $\lambda$. L'ensemble des valeurs propres de $A$ est dit spectre ponctuel de $A$ et est noté $\sigma_p(A)$. Ainsi,

$$\lambda \in \sigma_p(A) \Longleftrightarrow \exists x_\lambda \in H : \quad x_\lambda \neq 0 \quad et \quad A(x_\lambda) = \lambda.x_\lambda$$

**Situation 2.** L'opérateur $(A - \lambda.I)$ est injectif , non surjectif mais vérifie la relation : $\overline{(A - \lambda.I) H} = H$. Dans ce cas, on dit que $\lambda$ appartient au spectre continu de $A$. Le spectre continu de $A$ est noté $\sigma_c(A)$.

1. On utilise aussi le symbole $\mathcal{L}(H)$

**Situation 3.** L'opérateur $(A-\lambda.I)$ est injectif, non surjectif et $\overline{(A-\lambda.I)\,H} \neq H$. Dans ce cas, on dit $\lambda$ appartient au spectre résiduel de $A$. Le spectre continu de $A$ est noté $\sigma_{rés}(A)$ .

En résumé,

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_{rés}(A) \qquad (\textit{réunion disjointe}) \tag{1.1}$$

■

Les propriétés que nous allons établir dans la proposition immédiate sont fondamentales de par le fait qu'elles permettent de réduire considérablement les calculs lors de la recherche du spectre.

**Proposition 1.1.3** *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. Alors,*

1. 
$$\lambda\in\mathbb{C} \;\; et \;\; |\lambda| \succ \|A\| \Longrightarrow \lambda\notin\sigma(A)$$
   En d'autres termes, le spectre d'un opérateur linéaire borné est situé à l'intérieur de la boule fermée de centre $0$ et de rayon $\|A\|$.
2. $\sigma(A^*)=\overline{\sigma(A)}=\left\{\overline{\lambda} \;:\; \lambda\in\sigma(A)\right\}$
3. $\lambda\in\sigma_{rés}(A)\Longleftrightarrow\lambda\notin\sigma_p(A) \quad et \quad \overline{\lambda}\in\sigma_p(A^*)$ .

**Preuve.**

1. Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $|\lambda|\succ\|A\|$. Alors,
$$A-\lambda.I=-\lambda\left(I-\lambda^{-1}.A\right)$$
   Comme $\left\|\lambda^{-1}.A\right\|=\frac{\|A\|}{|\lambda|}\prec 1$, l'opérateur $\left(Id-\lambda^{-1}.A\right)^{-1}$ existe et est borné. Par conséquent, l'opérateur $(A-\lambda.Id)^{-1}=-\dfrac{1}{\lambda}\left(Id-\lambda^{-1}.A\right)^{-1}$ existe et est borné aussi. D'où, $\lambda\notin\sigma(A)$.

2. On a :
$$\begin{aligned}
\lambda &\in \rho(A)\Longleftrightarrow(A-\lambda.I)^{-1} \;\; \textit{existe et est borné}\\
&\Longleftrightarrow \left(A^*-\overline{\lambda}.I\right)^{-1}=\left((A-\lambda.I)^{-1}\right)^* \;\; \textit{existe et est borné}\\
&\Longleftrightarrow \overline{\lambda}\in\rho(A^*)
\end{aligned}$$
   Par conséquent,
$$\lambda\in\sigma(A)\Longleftrightarrow\lambda\notin\rho(A)\Longleftrightarrow\overline{\lambda}\notin\rho(A^*)\Longleftrightarrow\overline{\lambda}\in\sigma(A^*)$$

3. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ alors, par définition
$$\begin{aligned}
\lambda &\in \sigma_{rés}(A)\Longleftrightarrow\overline{(A-\lambda.I)\,H}\neq H\\
&\Longleftrightarrow \exists x_\lambda\in H:(A-\lambda.I)(x_\lambda)\neq 0 \; et \; x_\lambda\perp(A-\lambda.I)\,H\\
&\Longleftrightarrow \exists x_\lambda\in H:(A-\lambda.I)(x_\lambda)\neq 0 \;\; et \;\; < x_\lambda,(A-\lambda.I)(y)> \, = \;\; 0 \quad \forall y\in H\\
&\Longleftrightarrow \exists x_\lambda\in H:(A-\lambda.I)(x_\lambda)\neq 0 \;\; et \;\; < \left(A^*-\overline{\lambda}.I\right)(x_\lambda), y> \, = \;\; 0 \quad \forall y\in H\\
&\Longleftrightarrow \exists x_\lambda\in H:(A-\lambda.I)(x_\lambda)\neq 0 \;\; et \;\; \left(A^*-\overline{\lambda}.I\right)(x_\lambda)=0\\
&\Longleftrightarrow \lambda\notin\sigma_p(A) \quad et \quad \overline{\lambda}\in\sigma_p(A^*).
\end{aligned}$$

■

**Remarque.** En dimension finie, le spectre est constitué uniquement de valeurs propres. En effet, d'après le théorème du rang,

$$(A-\lambda.I)\ bijectif\ \Longleftrightarrow (A-\lambda.I)\ injectif\ \Longleftrightarrow (A-\lambda.I)\ surjectif$$

■

**Exemples.**

1. Soit $H$ un $\mathbb{C}$ -espace de Hilbert. On suppose que $H$ admet la représentation en somme orthogonale : $H = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_n$ de sous-espaces fermés. Cela signifie que :

$$x \in H \Longleftrightarrow \exists! \left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right) \in H_1 \times H_2 \times ... \times H_n : \left\{ \begin{array}{c} x = x_1 +\ x_2 +\ ... +\ x_n \\ et \\ \prec x_i,\ x_j \succ = 0 \quad i \neq j \end{array} \right.$$

   Considérons l'opérateur $A : H \longrightarrow H$, défini par :

$$A\left(x = x_1 +\ x_2 +\ ... +\ x_n\right) = \lambda_1 \bullet x_1 +\ \lambda_2 \bullet x_2 +\ ... + \lambda_n \bullet\ x_n, \qquad \left(\lambda_p\right)_{p=1}^{n} \subset \mathbb{K}$$

   L'opérateur $A$ est linéaire, borné avec $\|A\| = \max\left(|\lambda_1|,\ |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|\right)$. De plus, ·

2. Soient $H = L^2_{([0,\ 1];\ \mathbb{C})}$ et $B : H \longrightarrow H;\quad (B(x))(t) = tx(t)$. L'opérateur $B$ est borné de norme inférieure ou égale à 1. Donc, d'après le point 1 de la proposition précédente,

$$\sigma(B) \subseteq \overline{B}(0,1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}. \tag{1.2}$$

   Par ailleurs, un calcul simple et direct, permet de vérifier que $B = B^*$. Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $B$ alors, il existe une fonction $x_\lambda$ non identiquement nulle sur $[0,\ 1]$ telle que $B(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$. Par conséquent,

$$\forall t \in [0,\ 1] : (t-\lambda)\, x_\lambda(t) = 0. \tag{1.3}$$

   La relation 1.3 n'est possble que si $x_\lambda(t) = 0$ pour tout $t \in [0,\ 1]$. Mais ceci est à son tour impossible car la fonction est non identiquement nulle sur $[0,\ 1]$. Donc, $\lambda$ ne peut pas être une valeur propre de $B$ et par conséquent, $\sigma_p(B) = \varnothing$. Comme déjà remarqué plus haut, on a $B = B^*$. Donc on a aussi $\sigma_p(B^*) = \varnothing$. Ainsi,

$$\sigma_p(B) = \sigma_p(B^*) = \sigma_{rés}(B) = \varnothing.$$

   Nous allons montrer que $\sigma_c(B) = [0,\ 1]$. On sait déjà que

$$\sigma(B) \subseteq \overline{B}(0,1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

   Soit $\lambda \in \overline{B}(0,1)$. L'opérateur borné $B - \lambda.I$ est injectif. D'autre part, $\forall y \in L^2_{([0,\ 1];\ \mathbb{C})}$ l'équation $y = (B - \lambda.I)(x)$ admet une solution unique de la forme :

$$x(t) = \frac{y(t)}{t-\lambda} \qquad t \in [0,\ 1]. \tag{1.4}$$

   Cette solution est un élément de $L^2_{([0,\ 1];\ \mathbb{C})}$ si et seulemnt si, $\lambda \notin [0,\ 1]$. En d'autres termes, l'opérateur borné est bijectif si et seulement si, $\lambda \notin [0,\ 1]$. On peut donc conclure que $\sigma_c(B) = [0,\ 1] = \sigma(B)$.

■

## 1.2 Propriétés du spectre, résolvante, rayon spectral

**Proposition 1.2.1** *Si $A \in \mathcal{B}(H)$ alors, $\sigma(A)$ est un compact de $\mathbb{C}$.*

**Preuve.** D'après ce qui précéde, $\sigma(A)$ est un ensemble borné de $\mathbb{C}$[2]. Donc, pour montrer qu'il est compact, il suffit de montrer qu'il est fermé ou ce qui revient au même, que l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit donc $\lambda \in \rho(A)$. L'opérateur $(A - \lambda.I)^{-1}$ existe et est borné. Considérons la boule ouverte de centre $\lambda$ et de rayon $\frac{1}{\left\|(A-\lambda.I)^{-1}\right\|}$ :

$$B_0\left(\lambda,\ \frac{1}{\left\|(A-\lambda.I)^{-1}\right\|}\right) = \left\{z \in \mathbb{K} :\ |z-\lambda| \prec \frac{1}{\left\|(A-\lambda.I)^{-1}\right\|}\right\}$$

Pour tout $z \in B_0\left(\lambda,\ \frac{1}{\left\|(A-\lambda.I)^{-1}\right\|}\right)$,

$$A - z.I = (A-\lambda.I) + (\lambda - z).I = (A-\lambda.I)\left(I + (\lambda - z)(A-\lambda.I)^{-1}\right)$$

De l'inégalité

$$\left\|(\lambda - z).(A-\lambda.I)^{-1}\right\| = |z-\lambda| \left\|.(A-\lambda.I)^{-1}\right\| \prec 1,$$

découle que les opérateurs $\left(I + (\lambda - z).(A-\lambda.I)^{-1}\right)^{-1}$ et $(A - z.I)^{-1}$ existent et sont bornés. En d'autres termes, la boule ouverte $B_0\left(\lambda,\ \frac{1}{\left\|(A-\lambda.I)^{-1}\right\|}\right)$ est entiérement incluse dans $\rho(A)$ qui est donc un ouvert de $\mathbb{C}$. ■

**Définition 1.2.2** *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. On appelle résolvante de l'opérateur $A$ l'application :*

$$R_A : \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \longrightarrow \mathcal{B}(H); \qquad \lambda \longmapsto R_A(\lambda) = (A-\lambda.I)^{-1}$$

**Remarque.** Il est clair que cette application est bien définie. En appliquant cette définition aux exemples précédents, on obtient :

1. $R_A : \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1,\ \lambda_2, ..., \lambda_n\} \longrightarrow \mathcal{B}(H); \qquad \lambda \longmapsto R_A(\lambda) = (A-\lambda.I)^{-1}$

$$R_A(\lambda)(x = x_1 +\ x_2 +\ ... +\ x_n) = \frac{1}{\lambda - \lambda_1} \bullet x_1 +\ \frac{1}{\lambda-\lambda_2} \bullet x_2 +\ ... + \frac{1}{\lambda-\lambda_2} \bullet\ x_n$$

2. $R_B : \mathbb{C} \setminus [0,\ 1] \longrightarrow \mathcal{L}(H); \qquad \lambda \longmapsto R_B(\lambda) = (B - \lambda.Id)^{-1}$

$$(R_B(\lambda)(x))(t) = \frac{x(t)}{t-\lambda}$$

■

**Proposition 1.2.3** *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. Alors,*

1. On a l'identité de Hilbert :

$$\forall \lambda,\ \mu \in \rho(A); \qquad R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu) R_A(\lambda) R_A(\mu) = (\lambda-\mu) R_A(\mu) R_A(\lambda)$$

2. Pour tout $A \in \mathcal{B}(H)$ :

$$\lim_{|\lambda| \longrightarrow +\infty} R_A(\lambda) = 0 \ \ \text{(au sens de la topo log ie de la norme de } \mathcal{B}(H)\text{)}$$

2. $\sigma(A)$ est inclus dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $\|A\|$.

3. $R_A$ est une fonction continue de $\lambda$.

**Preuve.**

1. Calcul direct.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ qu'on peut supposer vérifiant $|\lambda| \succ 2\|A\|$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|R_A(\lambda)\| &= \left\|(A-\lambda.I)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\right\| \\
&= \frac{1}{|\lambda|}\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\|\left(\frac{A}{\lambda}\right)\right\|^n \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{2}{|\lambda|} \underset{|\lambda|\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow 0}.
\end{aligned}$$

3. Soit $\lambda \in \rho(A)$ et $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda+\delta \in \rho(A)$ (cela est possible car, $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{K}$). On a alors,

$$\begin{aligned}
R_A(\lambda+\delta)-R_A(\lambda) &= \delta R_A(\lambda+\delta)R_A(\lambda) \\
&= \delta(A-\lambda.Id)^{-1}\left(Id-\delta.(A-\lambda.Id)^{-1}\right)^{-1}R_A(\lambda) \\
&= \delta R_A(\lambda)(Id-\delta.R_A(\lambda))^{-1}R_A(\lambda)
\end{aligned}$$

Puisqu'on va chercher la limite quand $|\delta| \to 0$, on peut supposer que $|\delta| \prec \dfrac{1}{2\|R_A(\lambda)\|}$.
On obtient donc,

$$\begin{aligned}
\|R_A(\lambda+\delta)-R_A(\lambda)\| &= |\delta|\left\|R_A(\lambda)(Id-\delta.R_A(\lambda))^{-1}R_A(\lambda)\right\| \\
&\leq |\delta|\,\|R_A(\lambda)\|^2\left\|(Id-\delta.R_A(\lambda))^{-1}\right\| = |\delta|\,\|R_A(\lambda)\|^2\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}(\delta.R_A(\lambda))^n\right\| \\
&\leq |\delta|\,\|R_A(\lambda)\|^2\sum_{n=0}^{+\infty}\|\delta.R_A(\lambda)\|^n \leq |\delta|\,\|R_A(\lambda)\|^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = 2|\delta|\,\|R_A(\lambda)\|^2
\end{aligned}$$

D'où, par passage à la limite :

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\|R_A(\lambda+\delta)-R_A(\lambda)\| = 0$$

■

**Proposition 1.2.4** *Si $H$ est un espace de Hilbert complexe alors le spectre de tout opérateur linéaire borné dans $H$ est non vide.*

**Preuve.** Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ et $(x,\ y)$ un couple fixé arbitrairement dans $\mathbb{C}^2$. Posons :

$$F : \rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad F(\lambda) = \prec R_A(\lambda)(x),\ y \succ$$

Il est évident que $F$ est une fonction continue et que

$$\lim_{|\lambda|\longrightarrow+\infty} F(\lambda) = 0$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\longrightarrow 0}\frac{F(\lambda+\delta)-F(\lambda)}{\delta} &= \lim_{\delta\longrightarrow 0}\frac{1}{\delta}\prec \delta R_A(\lambda+\delta)R_A(\lambda)(x),\ y\succ \\
&= \lim_{\delta\longrightarrow 0}\prec R_A(\lambda+\delta)R_A(\lambda)(x),\ y\succ \\
&= \prec(R_A(\lambda))^2(x),\ y\succ
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction est dérivable sur $\rho(A)$. Comme $\rho(A)$ est ouvert, elle est aussi analytique sur $\rho(A)$.
Supposons maintenant que $\sigma(A) = \varnothing$. La fonction $F$ devient ainsi une fonction analytique sur tout $\mathbb{C}$. C'est donc une fonction entière. Par conséquent, elle est constante et

$$F(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

En particulier,

$$F(0) = \prec A^{-1}(x),\ y \succ = 0 \tag{1.5}$$

Puisque le couple $(x,\ y)$ est arbitraire dans $\mathbb{C}^2$ alors, la relation 1.5 ne peut avoir lieu que si $A^{-1} = 0$ ce qui est impossible. ■

**Définition 1.2.5** *Soit $A \in \mathcal{B}(H)$. On appelle rayon spectral de $A$ la quantité :*

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \tag{1.6}$$

Il est facile de voir que $r(A) \leq \|A\|$. De plus, on a la formule de Gelfand, permettant le calcul de $r(A)$ [6], [4] :

$$r(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (\|A^n\|)^{\frac{1}{n}} \tag{1.7}$$

En réalité, $r(A)$ désigne le rayon de convergence de la série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} = (\lambda I - A)^{-1} \tag{1.8}$$

**Remarque.** En appliquant la formule 1.6 aux opérateurs $A$ et $B$ cités en exemples au début de ce chapitre, on obtient,

$$r(A) = \sup\{|\lambda_1|, ..., |\lambda_1|\} = \|A\| \quad et \quad r(B) = \sup([0,\ 1]) = 1 = \|B\|$$

Cependant, il existe comme on le verra plus loin des opérateurs bornés vérifiant $r(A) \prec \|A\|$.
■

# Chapitre 2

# ÉTUDE SPECTRALE DES OPÉRATEURS COMPACTES

## 2.1 Rappels sur les opérateurs compactes dans les espaces de Banach

**Définition 2.1.1** *Soient $X$ et $Y$ deux $\mathbb{K}$ -espaces de Banach. Un opérateur linéaire $A : X \longrightarrow Y$ est dit compact si, $\mathcal{D}(A) = X$ et si pour toute partie bornée $M$ de $X$, l'image $A(M)$ est relativement compacte dans $Y$ $\Big($ c'est à dire, $\overline{A(M)}$ compacte dans $Y\Big)$.*

**Remarques.**

1. Un opérateur compact est toujours borné. En effet, le contraire signifierait l'existence d'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $X$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \|A(x_n)\| \succ n. \tag{2.1}$$
La suite $(A(x_n))_n$ ne peut donc contenir aucune sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de l'opérateur $A$.
2. Il existe des opérateurs bornés (en dimension infinie) qui ne sont pas compacts. En effet, l'opérateur $Id_X$ est borné mais non compacte car, la boule unité fermée (qui est l'image d'elle même par $Id_X$) n'est pas compacte d'après le théorème de Riesz.
3. Un opérateur borné est compact si et seulement si, il transforme toute suite bornée de $X$ en une suite contenant au moins une sous-suite convergente dans $Y$. (Exercice).
4. Un opérateur borné est compact si et seulement si, il transforme la boule unité fermée de $X$ en une partie relativement compacte de $Y$.

■

**Exemples.**

1. Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ est de rang fini $\dim(R(A)) \prec +\infty$ alors, il est compact. En effet, dans ce cas, le sous espace $R(A)$ est fermé et donc un espace de Banach pour la norme induite par celle de l'espace $Y$. Pour toute partie bornée $M$ de $X$, l'ensemble $\overline{A(M)}$ qui est un fermé borné de l'espace de Banach $R(A)$ est compact.
2. L'opérateur
$$A : l^2(\mathbb{K}) \longrightarrow l^2(\mathbb{K}); \quad A(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{2^n}x_n, ...\right)$$
est compact. En effet, l'image de la boule unité fermée est incluse dans le parallélépipéde $\prod_{p=1}^{+\infty} \left\{x_p \in \mathbb{K} : |x_p| \leq \frac{1}{2^p}\right\}$ qui est un produit d'espaces compacts donc, lui même compact.

3. L'opérateur

$$A : l^2(\mathbb{K}) \longrightarrow l^2(\mathbb{K}); \quad A(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...) = (0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ ...)$$

n'est pas compact. En effet, soit $M = \{e_i,\ i = 1,\ 2,\ ...\}$ la base canonique de $l^2(\mathbb{K})$. Il est clair que $M$ est un ensemble borné de $l^2(\mathbb{K})$ .D'autre part,

$$\|A(e_{i+1}) - A(e_i)\| = \|e_{i+2} - e_{i+1}\| = \sqrt{2} \qquad \forall i = 1,\ 2,\ ...$$

Donc, l'ensemble $A(M) = \{e_{i+1},\ \ i = 1,\ 2,\ ...\}$ ne peut contenir aucune sus-suite convergente. Il n'est donc pas relativement compact.

4. Dans l'espace $\left(X = C_{([0,\ 1],\ \mathbb{R})},\ \|.\|_\infty\right)$ , l'opérateur $A$, défini par :

$$(A(x))(t) = tx(t)$$

est borné mais non compact. En effet, la boule unité fermée $\overline{B}_X(0,1)$ est bornée et contient la famille $(x_n(t) = t^n)_{n\ \in\ \mathbb{N}}$. L'image $A\left(\overline{B}_X(0,1)\right)$ contient la famille $(x_n(t) = t^n)_{n\ \in\ \mathbb{N}^*}$. Comme la famille $(x_n(t) = t^n)_{n\ \in\ \mathbb{N}^*}$ n'est pas équicontinue (Voir TD semestre 1), elle n'est d'après le théorèmed'Ascoli - Arzèla pas relativement compacte. Donc, $A\left(\overline{B}_X(0,1)\right)$ aussi, ne peut pas être relativement compacte, ce qui veut dire que l'opérateur $A$ n'est pas compact.

■

**Notation 2.1.2** *Soient $X,\ Y$ deux $\mathbb{C}$ -espaces de Banach. Alors, l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de $X$ dans $Y$ , sera noté $\mathcal{K}(X,Y)$.*

**Proposition 2.1.3** *Soient $X,\ Y$ et $Z$ trois $\mathbb{C}$ -espaces de Banach. Alors,*

1. L'ensemble $\mathcal{K}(X,Z)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(X,Y)$.
2. Si $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ et $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$ alors, $B \circ A \in \mathcal{K}(X,Z)$. De même, si $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ et $B \in \mathcal{K}(Y,Z)$ alors, $B \circ A \in \mathcal{K}(X,Z)$.
3. Si $A \in \mathcal{K}(X,Y)$ et $\dim(X) = \dim(X) = +\infty$ alors $A$ ne peut pas avoir un inverse borné.
4. Si une suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{K}(X,Y)$ qui converge vers $A$ dans $\mathcal{B}(X,Y)$ , c'est à dire que $\lim_{n\ \longrightarrow\ +\infty} \|A_n - A\| = 0$. Alors, $A \in \mathcal{K}(X,Y)$.

## 2.2 Modes de convergence dans les espaces de Hilbert

**Définition 2.2.1** *Soient $H$ un espace de Hilbert et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $H$. On dira que :*

1. *La suite $(x_n)_n$ converge fortement vers $x \in H$ si,*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{\prec x_n - x,\ x_n - x \succ} = 0. \tag{2.2}$$

*On écrit dans ce cas :*

$$x = s.\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n \qquad (\textit{la lettre } \underline{s} \textit{ pour l'anglais strong qui signifie fort})$$

*$x$ est appelé limite forte de la suite $(x_n)_n$. La convergence forte signifie la convergence pour la norme de l'espace.*

2. *La suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers $x \in H$ si,*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \prec x_n,\ y \succ = \prec x,\ y \succ \qquad \forall y \in H \tag{2.3}$$

*On écrit dans ce cas,*

$$x = w.\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n \qquad (\textit{la lettre } \underline{w} \textit{ pour l'anglais weak qui signifie faible})$$

*$x$ est appelé limite faible de la suite $(x_n)_n$*

**Proposition 2.2.2** *Soient $H$ un espace de Hilbert et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $H$. Alors,*

$$x = s.\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n \Longleftrightarrow \begin{cases} x = w.\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n \\ \quad et \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\| = \|x\| \end{cases}.$$

**Preuve.** Supposons que la suite $(x_n)_n$ converge fortement vers $x$. Alors, pour tout $y \in H$,

$$\left|\lim_{n\longrightarrow+\infty} \prec x_n - x,\ y \succ\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} |\prec x_n - x,\ y \succ| \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} (\|x_n - x\|\,\|y\|) = 0$$

Donc, la suite $(x_n)_n$ converge faiblement vers $x$. D'autre part,

$$\begin{cases} |\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \\ \quad et \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n - x\| = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

Inversement, supposons $(x_n)_n$ converge faiblement vers $x$ et que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n - x\|^2 &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \prec x_n - x,\ x_n - x \succ \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} (\prec x_n,\ x_n \succ + \prec x,\ x \succ - \prec x_n,\ x \succ - \prec x,\ x_n \succ) \\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\|x_n\|^2 + \|x\|^2 - \prec x_n,\ x \succ - \prec x,\ x_n \succ\right) = 0. \end{aligned}$$

■

**Remarques.**

1. La limite d'une suite faiblement bornée est unique. De plus, en utilisant le théorème de Banach Steinhauss sur la borne uniforme, on peut montrer q'une suite faiblement convergente est nécessairement bornée (Exercice).
2. Il existe des suites faiblement convergentes mais non fortement convergentes. En effet, soit $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ une base orthonormée de l'espace de Hilbert $H$. Pour tout $x \in H$, on a :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \prec x,\ e_n \succ e_n \qquad et \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\prec x,\ e_n \succ|^2.$$

   Par conséquent,

$$\forall x \in H : \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \prec e_n, x \succ = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \prec x,\ e_n \succ = 0.$$

   Donc, la suite $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ converge faiblement vers le vecteur nul de $H$. Cependant, pour tout $n \geq 1$,

$$\|e_{n+1} - e_n\|^2 = \prec e_{n+1} - e_n,\ e_{n+1} - e_n \succ = 2.$$

   Ainsi, la suite $(e_n)_{n=1}^{+\infty}$ n'est pas de Cauchy et donc, ne peut être fortement convergente.

■

**Définition 2.2.3** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Hilbert et $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(X,Y)$. On dira que :*

1. La suite $(A_n)_n$ vers $A$ dans $\mathcal{L}(X,Y)$ si, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\|A_n - A\| = 0$. On écrit alors, $A_n \rightrightarrows A$. ($A$ est appelé limite uniforme de la suite $(A_n)_n$).
2. La suite $(A_n)_n$ converge fortement vers $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ si, pour tout $x \in X$, la suite $(A_n(x))_n$ converge fortement vers $A(x)$. On écrit alors, $A_n \overset{s}{\longrightarrow} A$. ($A$ est appelé limite forte de la suite $(A_n)_n$).
3. La suite $(A_n)_n$ converge faiblement vers $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ si, pour tout $x \in X$, la suite $(A_n(x))_n$ converge faiblement vers $A(x)$ dans $Y$. On écrit alors, $A_n \overset{w}{\longrightarrow} A$. ($A$ est appelé limite faible de la suite $(A_n)_n$).

**Remarque.**

$$A_n \overset{w}{\longrightarrow} A \iff \forall x \in X,\ \forall y \in Y :\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \prec A_n(x),\ y \succ = \prec A(x),\ y \succ$$

■

**Proposition 2.2.4** *Pour les suites d'opérateurs dans les espaces de Hilbert, on a*

$$convergence\ uniforme \Longrightarrow convergence\ forte \Longrightarrow convergence\ faible$$

**Preuve.** D'après ce qui précède, il suffit de démontrer la première implication. Soit $x \in X$ et $x \neq 0$. Alors,

$$\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sup\limits_{\|y\|=1}\|A_n(y) - A(y)\|\right) = 0 \\ et \\ \left\|A_n\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) - A\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup\limits_{\|y\|=1}\|A_n(y) - A(y)\| \end{array}\right. \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty}\|A_n(x) - A(x)\| = 0.$$

Donc, $(A_n \rightrightarrows A) \Longrightarrow A_n \overset{s}{\longrightarrow} A$.

■

L'exemple que nous donnons maintenant, montre qu'il existe des suites d'opérateurs fortement convergentes qui ne convergent pas uniformément.

**Exemple 2.2.5** *Soit $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ une base Hilbertienne de l'espace $l^2(\mathbb{R})$. Considérons dans cet espace, la suite d'oprateurs :*

$$P_n : l^2(\mathbb{R}) \longrightarrow l^2(\mathbb{R}); \quad x = \sum_{k=1}^{+\infty} \prec x,\ e_k \succ e_k \longmapsto P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \prec x,\ e_k \succ e_k.$$

*Pour tout $x$ dans $l^2(\mathbb{R})$, on a :*

$$\|P_n(x) - x\|_2^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} \prec x,\ e_k \succ e_k\right\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\prec x,\ e_k \succ|^2$$

*Cette quantité est le reste de la série convergente $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|\prec x,\ e_k \succ|^2 = \|x\|_2^2$. Elle converge donc vers $0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Ainsi,*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|(P_n - Id)(x)\|_2 = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\|P_n(x) - x\|_2 = \sqrt{\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=n+1}^{+\infty}|\prec x,\ e_k \succ|^2} = 0.$$

*Donc,* $P_n \xrightarrow{s} Id$*. Montrons qu'on n'a pas cependant la convergence uniforme. En effet, pour tout naturel* $n \geq 1$*, posons* $x_n = e_1 + ... + e_n + e_{n+1}$*. Alors,*

$$\|(P_n - Id)(x_n)\|_2 = \|P_n(x_n) - x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\prec e_{n+1},\ e_k \succ|^2} = 1$$

*D'où,* $\|P_n - Id\|_2 \geq 1$ *pour tout naturel* $n \geq 1$*. Donc,* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|P_n - Id\|_2 \geq 1$ *et par conséquent, on n'a pas* $P_n \rightrightarrows Id$*.*

**Proposition 2.2.6** *Soient* $X$ *et* $Y$ *deux espaces de Hilbert,* $(A_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{L}(X,Y)$ *et* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$*. Alors,*

1. $(A_n \rightrightarrows A) \Longrightarrow (A_n^* \rightrightarrows A^*)$.
2. $\left(A_n \xrightarrow{w} A\right) \Longrightarrow \left(A_n^* \xrightarrow{w} A^*\right)$.

**Preuve.** La première assertion découle directement de la relation :

$$\|A_n^* - A^*\| = \|A_n - A\|$$

Pour la deuxième, on a pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \prec x,\ A_n^*(\ y) \succ\ = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prec A_n(x),\ y \succ = \prec A(x),\ y \succ = \prec x,\ A^*(\ y) \succ.$$

■

## 2.3 Opérateurs compactes dans les espaces de Hilbert

Nous allons commencer ce paragraphe en donnant un résultat permettant de caractériser les opérateurs compacts dans les espaces de Hilbert séparables.

**Theorème 2.3.1** *Soient* $H_1$ *et* $H_2$ *deux espaces de Hilbert séparables et* $A \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$*. Alors,* $A$ *est compact si et seulement si, l'image par* $A$ *de toute suite faiblement convergente dans* $H_1$ *est une suite fortement convergente dans* $H_2$*.*

**Preuve.** Supposons que $A$ est compact et soit $(x_n)_n$ une suite faiblement convergente dans $H_1$. Comme toute suite faiblement convergente est bornée, il existe $r \succ 0$ tel que pour tout naturel $n$, $x_n \in B(0,r)$ (boule ouverte). D'où,

$$\{A(x_n),\ n \in \mathbb{N}\} \subset A(B(0,r)) \subseteq \overline{A(B(0,r))}$$

Comme l'ensemble $\overline{A(B(0,r))}$ est compact, la suite $(A(x_n))_n$ contient au moins une sous-suite convergente fortement vers un élément $y \in H_2$. Pour montrer que la suite $(A(x_n))_n$ converge vers $y$, il faut montrer que toute autre sous-suite de la suite $(A(x_n))_n$ converge aussi fortement vers $y$. Soit $x$ la limite faible de $(x_n)_n$ :

$$\forall z_1 \in H_1 :\ \prec x_n,\ z_1 \succ \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \prec x,\ z_1 \succ$$

Par conséquent, pour tout $z_2 \in H_2$ :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \prec A(x_n),\ z_2 \succ = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prec x_n,\ A^*(z_2) \succ = \prec x,\ A^*(z_2) \succ$$

D'où,

$$A(x_n) \xrightarrow{w} A(x) \quad et \quad y = A(x)$$

Soit $(A(x_{n_k}))_{n_k}$ une sous-suite de $(A(x_n))_n$ qui converge fortement vers un élément $y_1 \in H_2$. On a alors,

$$\left(A(x_{n_k}) \xrightarrow{s} y_1\right) \Longrightarrow \left(A(x_{n_k}) \xrightarrow{w} y_1\right) \Longrightarrow y_1 = A(x) = y$$

Inversement, supposons que pour toute suite faiblement convergente dans $H_1$, la suite des images est fortement convergente dans $H_2$ et montrons que $A$ est compact. Soit donc $M$ un sous ensemble borné de $H_1$ et soit $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $\overline{A(M)}$. On a ,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in M : \quad \|y_n - A(x_n)\| \prec \frac{1}{n} \tag{2.4}$$

D'autre part,

$$(x_n)_n \quad \textit{bornée dans } H_1 \Longrightarrow \forall a \in H_1, \quad (\prec x_n,\ a \succ)_n \quad \textit{bornée dans } \mathbb{K} = \mathbb{R} \textit{ ou } \mathbb{C}$$

Il existe donc une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k}$ telle que la suite $(\prec x_{n_k},\ a \succ)_{n_k}$ est convergente. Cela signifie que la sous-suite $(x_{n_k})_{n_k}$ est faiblement convergente vers un élément $x$ dans $H_1$. Par hypothèse, la suite $(A(x_{n_k}))_{n_k}$ converge fortement vers $A(x)$. D'autre part,

$$0 \leq \|y_{n_k} - A(x)\| \leq \|y_{n_k} - A(x_{n_k})\| + \|A(x_{n_k}) - A(x)\| \prec \frac{1}{n_k} + \|A(x_{n_k}) - A(x)\|$$

D'où,

$$\lim_{n_k \longrightarrow +\infty} \|y_{n_k} - A(x)\| = 0$$

La suite $(y_n)_n$ contient donc une sous-suite fortement convergente dans $H_2$. ■

Le résultat que nous énonçons ci-dessous rassemble différentes caractérisations des opérateurs compacts dans les espaces de Hilbert.

**Theorème 2.3.2** [1] *Soient $H_1$ et $H_2$ deux espaces de Hilbert séparables et $A \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $A$ est compact ;
2. L'image par $A$ de toute suite faiblement convergente dans $H_1$ est une suite fortement convergente dans $H_2$ ;
3. L'image par $A$ de toute suite faiblement convergente vers 0 dans $H_1$ est une suite fortement convergente vers 0 dans $H_2$ ;
4. Pour toute famille orthonormée [2] dénombrable $(e_n)_n$ de $H_1$, on a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|A(e_n)\| = 0$ ;
5. $A$ est la limite uniforme d'une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs de rangs finis.

**Preuve.** On a déjà (1) $\Longleftrightarrow$ (2) et (2) $\Longrightarrow$ (3) est évidente. (3) $\Longrightarrow$ (4) découle du fait qu'une famille dénombrable orthonormée est une suite faiblement convergente vers 0. De même, l'implication (5) $\Longrightarrow$ (1) a été établie dans le cas plus général des espaces de Banach (voir paragraphe précédent). Finalement, il reste seulement à établir l'implication (4) $\Longrightarrow$ (5). Supposons donc que (4) est vérifiée et que (5) ne l'est pas. Dans ce cas, il existe $\varepsilon \succ 0$ tel que pour tout opérateur $B$ de rang fini : $\|A - B\| \succ \varepsilon$. Par ailleurs,

$$(\|A\| \succ \varepsilon = \|A - 0\| \succ \varepsilon) \Longrightarrow \exists a_0 \in H_1 : \quad \|a_0\| = 1 \quad \textit{et} \quad \|A(a_0)\| \succ \varepsilon.$$

Tout vecteur $x$ de $H_1$, s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = \prec x,\ a_0 \succ a_0\ + x_0 \quad \textit{avec} \quad \prec x_0,\ a_0 \succ =\ 0.$$

1. Ce théorème reste vrai si, l'espace d'arrivée est seulement un espace de Banach
2. Chaque vecteur de cette famille est de norme 1 et tous ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux

Soit $P_0$ l'orthoprojecteur de $H_1$ sur le sous-espace $X_0$ engendré par le vecteur $a_0$ :

$$P_0 : H_1 \longrightarrow X_0; \qquad P_0(x) = \prec x_0,\ a_0 \succ a_0.$$

L'opérateur $AP_0$ est de rang fini. Donc, $\|A - AP_0\| \succ \varepsilon$. On a donc,

$$\exists a_1 \in H_1 : \quad \|a_1\| = 1 \quad et \quad \|(A - AP_0)(a_1)\| \succ \varepsilon.$$

De plus, tout vecteur $x$ de $H_1$, s'écrit de façon unique sous la forme :

$$\begin{cases} x = \prec x,\ a_0 \succ a_0 + \prec x,\ a_1 \succ a_1 + x_1 \\ et \\ \prec x_1,\ a_0 \succ = \prec x_1,\ a_1 \succ = \prec a_0,\ a_1 \succ = 0 \end{cases}$$

Soit $P_1$ l'orthoprojecteur de $H_1$ sur le sous-espace $X_1$ engendré par les vecteurs $a_0$ et $a_1$ :

$$P_0 : H_1 \longrightarrow X_0; \qquad P_1(x) = \prec x,\ a_0 \succ a_0 + \prec x,\ a_1 \succ a_1.$$

L'opérateur $AP_1$ est de rang fini et $\|A - AP_1\| \succ \varepsilon$. En continuant ce processus, on obtient une suite infinie $(e_n)_n$ orthonormée d'éléments de $H_1$ telle que $\|A - AP_n\| \succ \varepsilon$ où, $P_n$ est l'orthoprojecteur de $H_1$ sur le sous-espace $X_n$ engendré par les vecteurs $a_0,\ a_1, ..., a_n$. Par construction, la famille $\left(e_n = \dfrac{(Id_{H_1} - P_n)(a_n)}{\|(Id_{H_1} - P_n)(a_n)\|}\right)_n$ est orthonormée et,

$$\|A(e_n)\| \succ \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Or, ceci contredit l'hypothèse $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \|A(e_n)\| = 0$. ■

Un autre résultat utile est la proposition suivante.

**Proposition 2.3.3** *Soient $H_1$ et $H_2$ deux espaces de Hilbert séparables et $A \in \mathcal{L}(H_1,\ H_2)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $A$ compact ;
2. $AA^*$ compact ;
3. $A^*$ compact
4. $A^*A$ compact.

**Preuve.** Supposons que $A$ est compact. Comme l'opérateur $A^*$ est borné alors, l'opérateur $AA^*$ est aussi compact. On a donc l'implication $(1) \Longrightarrow (2)$. D'autre part, soit $(e_n)_n$ une famille orthonormée d'éléments de $H_2$. Alors, de la compacité de l'opérateur $AA^*$, découle,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A^*(e_n)\|^2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prec A^*(e_n),\ A^*(e_n) \succ \\ &= \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prec AA^*(e_n),\ e_n \succ \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|AA^*(e_n)\| = 0. \end{aligned}$$

L'opérateur $A^*$ est donc aussi compact. Il en est de même pour l'opérateur $A^*A$ (composition d'un compacte et d'un borné). On a donc les implications $(2) \Longrightarrow (3)$ et $(3) \Longrightarrow (4)$. Soit maintenant $(a_n)_n$ une famille orthonormée d'éléments de $H_1$. Alors, de la compacité de l'opérateur $A^*A$, découle que :

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A(a_n)\|^2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prec A(a_n),\ A(a_n) \succ \\ &= \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prec A^*A(a_n),\ a_n \succ \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|A^*A(a_n)\| = 0. \end{aligned}$$

D'où l'implication $(4) \Longrightarrow (1)$. ■

Nous terminons cette section par la donnée quelques classes d'opérateurs compactes :

1. Les opérateurs de rang fini : $\dim R(A) \prec +\infty$.
2. Les opérateurs de rang presque fini : Ce sont les opérateurs qui sont limites uniformes de suites d'opérateurs de rangs finis.
3. Les opérateurs intégraux à noyaux continus :

$$A : C\left([a,\ b],\ \mathbb{K}\right) \longrightarrow C\left([a,\ b],\ \mathbb{K}\right), \qquad Af(x) = \int_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt \tag{2.5}$$

Le noyau $K(x,t) \in C\left([a,\ b]\times[a,\ b],\ \mathbb{K}\right)$.

4. Les opérateurs intégraux à noyaux carré-intègrables :

$$A : L^2\left([a,\ b],\ \mathbb{K}\right) \longrightarrow L^2\left([a,\ b],\ \mathbb{K}\right), \qquad Af(x) = \int_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt \tag{2.6}$$

Le noyau $K(x,t)$ vérifie la condition :

$$\int_a^b |K(x,t)|^2\, dtdx \prec +\infty \tag{2.7}$$

5. Les opérateurs de Hilbert-Schmidt : Ce sont des opérateurs $A$ définis dans des espaces de Hilbert séparables $H$ et vérifiant la condition : Il existe au moins une base Hilbertienne $(e_k)_{k=1}^{+\infty}$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|A(e_k)\|^2 \prec +\infty \tag{2.8}$$

(En réalité, si l'inégalité 2.8 est vérifiée pour une base hilbertienne donnée, elle est alors vérifiée pour toute autre base Hilbertienne).

## 2.4 Etude spectrale des opérateurs compactes

Dans cette partie nous les premières propriétés du spectre d'un opérateur compacte dans un espace de Hilbert. D'autres importantes propriétés seront données plus tard lors de l'étude spectrale des opérateurs compactes auto-adjoints. Cependant, nous aurons pour le moment besoin de la définition et du théorème fondamental suivants.

**Définition 2.4.1** *Soient $A \in \mathcal{L}(H)$ et $\lambda$ un scalaire. On appelle multiplicité de $\lambda$ la dimension du sous-espace $\mathcal{N}(A-\lambda I) = \ker(A-\lambda I)$.*

**Theorème 2.4.2** *(Alternative de Fredholm) Soit $A$ un opérateur compact dans un espace de Hilbert séparable $H$ $\quad (A \in \mathcal{K}(H))$. Alors,*

1. *$\mathcal{N}(Id-A)$ est de dimension finie.*
2. *$\mathcal{R}(Id-A)$ est fermé.*
3. *$(Id-A)$ injectif $\Longleftrightarrow$ $(Id-A)$ surjectif.*

***Preuve.*** *Voir annexe à la fin de ce chapitre.* ∎

**Theorème 2.4.3** *(Propriétés du spectre d'un opérateur compact) Soit $A$ un opérateur compact dans un espace de Hilbert séparable $H$ $\quad (A \in \mathcal{K}(H))$. On suppose que l'espace $H$ est de dimension infinie. Alors,*

1. $0 \in \sigma(A)$.
2. $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ *et toute valeur propre est de multiplicité finie.*
3. *Pour tout $\delta \succ 0$, l'ensemble des valeurs deux à deux distinctes et en module supérieures ou égales à $\delta$ est fini.*
4. $\sigma(A)$ *est au plus infini dénombrable.*
5. *Si $\sigma(A)$ est constitué d'une suite infinie de valeurs deux à deux distinctes alors, cette suite converge vers 0.*

***Preuve.***

1. *Dans le cas contraire on aura que l'opérateur $A$ est inversible et son inverse est borné, ce qui est impossible pour un opérateur compact en dimension infinie.*
2. *On a,*

$$\lambda \in \sigma(A) \quad et \quad \lambda \neq 0 \; et \; (A - \lambda Id) \; injectif \Longrightarrow (A - \lambda Id) = -\lambda \left( Id - \frac{A}{\lambda} \right) \; injectif$$

*Comme l'opérateur $\frac{A}{\lambda}$ est aussi compact, on a d'après l'alternative de Fredholm : $(A - \lambda Id)$ surjectif aussi et donc $(A - \lambda Id)$ inversible et d'inverse borné. Dans ce cas, $\lambda \notin \sigma(A)$. Par conséquent,*

$$\lambda \in \sigma(A) \quad et \quad \lambda \neq 0 \Longrightarrow (A - \lambda Id) \; non \; injectif \; \Longrightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$$

*De plus d'après l'alternative de Fredholm (point 2), la multiplicité de toute valeur propre est finie car,*

$$\ker(A - \lambda Id) = \ker\left(-\lambda\left(Id - \frac{A}{\lambda}\right)\right) = \ker\left(Id - \frac{A}{\lambda}\right) \prec +\infty.$$

3. *Soit $\delta \succ 0$ et supposons qu'il existe une suite infinie $(\lambda_n)_n$ de valeurs deux à deux distinctes et telles que : $|\lambda_n| \geq \delta \quad \forall n$. Désignons par $x_n$ le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_n$ et par $H_n$ le sous espace engendré par les vecteurs $x_1, \; x_2, \; ..., \; x_n$. On a :*

$$x \in H_n \Longrightarrow x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \bullet x_k \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A(x) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \alpha_k) \bullet x_k \\ et \\ (A - \lambda_n Id)(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k \alpha_k) \bullet x_k \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A(H_n) \subset H_n \\ et \\ (A - \lambda_n Id)(H_n) \subset H_{n-1} \end{array} \right.$$

*En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Scmidt, on peut construire une suite orthonormée $(e_n)_n$ vérifiant :*

$$\|e_n\| = 1, \quad e_n \in H_n \quad et \quad e_n \perp H_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

*Par conséquent,*

$$n \succ m \Longrightarrow A(e_n) - A(e_m) = \lambda_n \bullet e_n + (A(e_n) - \lambda_n \bullet e_n) - A(e_m)$$

$$= \lambda_n \bullet e_n - [A(e_m) - (A(e_n) - \lambda_n \bullet e_n)]$$

*Comme $A(e_m) - (A(e_n) - \lambda_n \bullet e_n) \in H_{n-1}$ alors,*

$$n \succ m \Longrightarrow \|A(e_n) - A(e_m)\| \geq \inf_{z \in H_{n-1}} \|A(e_n) - z\| = \|A(e_n)\| = |\lambda_n| \geq \delta$$

*Cette dernière inégalité montre que la suite $(A(e_n))_n$ ne peut pas contenir de sous-suite convergente, ce qui contredit la compacité de l'opérateur $A$. Finalement, il ne peut exister qu'un nombre fini de valeurs deux à deux distinctes en module supérieures ou égales à $\delta$.*

4. *On doit montrer que si $\sigma(A)$ est infini alors, il est dénombrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :*

$$A_n = \left\{ \lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\} : \ \frac{1}{n} \leq |\lambda| \right\}$$

*Il est clair que,*

$$\sigma(A) \setminus \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n \quad et \quad Card(A_n) \prec +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

*Les ensembles $\sigma(A) \setminus \{0\}$ et $\sigma(A)$ sont donc dénombrables*

5. *Supposons que $\sigma(A)$ est constitué d'une suite infinie de valeurs deux à deux distinctes. D'après le point précédent toute boule centrée en $0$ contient toutes les valeurs propres sauf peut-être un nombre et ça est exactement la définition de la convergence vers $0$.*

■

## 2.5 Annexe 1 : Alternative de Fredholm

**Theorème 2.5.1** *Soit $A$ un opérateur compact dans un espace de Hilbert séparable $H$. Alors,*

1. *$\mathcal{N}(Id - A)$ est de dimension finie.*
2. *$\mathcal{R}(Id - A)$ est fermé.*

***Preuve.***

1. *Supposons que $E = \ker(Id - A)$ est de dimension infinie. Il est clair que $E$ est fermé (l'image réciproque par une application continue du fermé $\{0_F\}$) et c'est donc aussi un espace de Hilbert. Soit $\{e_i\}_{i=1}^{+\infty}$ une base hilbertienne de $E = \ker(Id - A)$.*

$$\prec e_i \, , e_j \succ = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad , \quad x \in E \Longrightarrow \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{+\infty} \prec x \, , e_i \succ \bullet \, e_i \\ \\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} |\prec x \, , e_i \succ|^2 \end{cases} .$$

*On a, $A(e_i) = e_i \quad \forall i$. Par conséquent, la suite $\{A(e_i)\}_{i=1}^{+\infty}$ ne contient pas de sous-suite convergente. Or ceci, contredit l'hypothèse que $A$ est un opérateur compact. Donc, $\mathcal{N}(Id - A)$ est de dimension finie.*

2. *Il faut montrer que si $(y_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{R}(Id - A)$ qui converge vers $y$ alors, $y \in \mathcal{R}(Id - A)$. On a,*

$$\forall n, \ \exists x_n \in H : \ y_n = (Id - A)(x_n) \tag{2.9}$$

*De plus,*

$$\forall n, \ \exists u_n \in \ker(Id - A) \quad et \quad \exists v_n \in (\ker(Id - A))^{\perp} : \ x_n = u_n + v_n \tag{2.10}$$

*La suite $(v_n)_n$ peut être supposée bornée. Par conséquent, la suite $(A(v_n))_n$ contient une sous-suite convergente $(A(v_{n_k}))_{n_k}$. D'autre part,*

$$\begin{cases} v_{n_k} = (Id - A)(v_{n_k}) + A(v_{n_k}) = y_{n_k} + A(v_{n_k}) \\ \qquad (y_{n_k})_{n_k} \quad et \quad (v_{n_k})_{n_k} \end{cases} \Longrightarrow \exists \lim_{n_k \longrightarrow +\infty} v_{n_k} = v \tag{2.11}$$

*Par conséquent,*

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = \lim_{n_k \longrightarrow +\infty} y_{n_k} = \lim_{n_k \longrightarrow +\infty} (Id - A)(v_{n_k}) \\ &= (Id - A)\left( \lim_{n_k \longrightarrow +\infty} v_{n_k} \right) = (Id - A)(v) \in \mathcal{R}(Id - A) \end{aligned}$$

■

**Proposition 2.5.2** *Soit $A$ un opérateur borné dans un espace de Hilbert $H$. Alors, on a les sommes orthogonales :*

$$H = \ker A^* \oplus \overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A^*)}\,^3 \tag{2.12}$$

***Preuve.*** *Pour montrer la première égalité, il suffit de montrer que,*

$$y \in \mathcal{R}(A) \Longleftrightarrow \prec z \ , \ y \succ = 0 \quad \forall z \in \ker A^*$$

*Posons $y = A(x)$, $x \in H$. Alors,*

$$\forall z \in \ker A^* : \prec z \ , \ y \succ = \prec z \ , \ A(x) \succ = \prec A^*(z) \ , \ x \succ = 0.$$

*La deuxième égalité se démontre de la même manière, en remplaçant $A$ par $A^*$.* ■

**Theorème 2.5.3** *(Alternative de Fredholm) Soit $A$ un opérateur compact dans un espace de Hilbert séparable $H$. Alors,*

$$(Id - A) \ \textit{injectif} \Longleftrightarrow (Id - A) \ \textit{surjectif}. \tag{2.13}$$

***Preuve.*** *Supposons que $(Id - A)$ est injectif et posons,*

$$T = (Id - A), \qquad E_n = T^n(H), \quad n = 0, 1, ... \tag{2.14}$$

*Il est clair que*

$$H = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \ ... \ \subseteq \ E_n \ \subseteq \ .... \tag{2.15}$$

*Supposons que $E_n \neq E_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Dans ce cas, on peut trouver une suite $(x_n)_n$ d'éléménts de $E_n$ telle que :*

$$\|x_n\| = 1 \quad et \quad \|A(x_n) - A(x_m)\| \succ \frac{1}{2} \quad \forall n \neq m \tag{2.16}$$

*Cela signifie que la suite $(A(x_n))_n$ ne peut contenir aucune sous-suite convergente, ce qui cintredit la compacité de l'opérateur $A$. Il existe donc, $n \in \mathbb{N}$ tel que : $E_n = E_{n+1}$.*
*Nous allons montrer qu'en réalité, $E_n = E_{n+1} = H$ pour tout $n \geq 1$. Soit donc $N$ le plus petit naturel, vérifiant : $E_{N-1} \neq E_N = E_{N+1}$. On a alors,*

$$y \quad \in \quad E_{N-1} \ominus E_N \Longrightarrow T(y) \in E_N = E_{N+1} \Longrightarrow \exists z \in E_N : \ z \neq y \ \ et \ T(z) = T(y)$$

$$\Longrightarrow \quad \exists z \neq y : \ (Id - A)(y) = T(y) = T(z) = (Id - A)(z)$$

*Or ceci, contredit l'injectivité de l'opérateur $(Id - A)$. Par conséquent, il n'existe aucun naturel $N$ tel que : $E_{N-1} \neq E_N = E_{N+1}$, c'est à dire que :*

$$H = E_0 = E_1 = ... = E_n = ... \tag{2.17}$$

*Cette dernière formule montre en particulier que : $E_1 = T(H) = (Id - A)(H)$. D'où, l'opérateur $(Id - A)$ est surjectif.*
*Inversement, en utilisant 2.12 et l'implication que nous venons juste d'établir (appliquée pour $A^*$),*

$$\begin{aligned} (Id - A) \ surjectif \quad &\Longrightarrow \quad \ker(Id - A^*) = \{0\} \\ &\Longrightarrow \quad \overline{\mathcal{R}(Id - A^*)} = H \Longrightarrow \ker(Id - A) = \{0\} \\ &\Longrightarrow \quad (Id - A) \ \textit{injectif}. \end{aligned}$$

■

3. Ces deux égalités restent vraies si l'opérateur $A$ est seulement fermé mais à domaine dense dans $H$.

# Chapitre 3

# Opérateurs auto-adjoints bornés

Dans tout ce qui suit, $H$ est un espace de Hilbert complexe séparable.

## 3.1 Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints bornés

**Définition 3.1.1** *Un opérateur $A$ défini et borné dans un espace dans un espace de Hilbert $H$ est dit auto-adjoint si,*

$$A(x) = A^*(x) \qquad \forall x \in H$$

*ou sous forme équivalente :*

$$\prec A(x),\ y \succ = \prec x,\ A(y) \succ \qquad \forall x,\ y \in H.$$

**Exemples.** (d'opérateurs auto-adjoints)

1. L'identité dans un espace de Hilbert ;
2. Dans $\mathbb{C}^n$ les opérateurs auto-adjoints sont les opérateurs dans les matrices $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ vérifient : $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ ;
3. Dans $L^2_{[a,\ b]}$ les opérateurs intègraux de la forme :

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds \quad avec \quad \overline{K(t,s)} = K(s,t) \quad \forall s,\ t \in [a,\ b]$$

4. Les opérateurs de projection orthogonale.

■

**Proposition 3.1.2** *Si $A$ est auto-adjoint borné alors,*

$$\|A\| = \sup\{|\prec A(x),\ x \succ| :\ \|x\| = 1\}$$

**Preuve.** Posons,

$$M = \sup\{|\prec A(x),\ x \succ| :\ \|x\| = 1\}$$

Il est clair que,

$$\|x\| = 1 \Longrightarrow |\prec A(x),\ x \succ| \leq \|A\| \Longrightarrow M \leq \|A\|$$

Par ailleurs, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{1}{\|x\|^2} |\prec A(x),\ x \succ| = \left| \prec A\left(\frac{x}{\|x\|}\right),\ \frac{x}{\|x\|} \succ \right| \leq M \Longrightarrow |\prec A(x),\ x \succ| \leq M \|x\|^2$$

Pour tous $x,\ y$ vérifiant $\|x\| = \|y\| = 1$,

$$\prec A(x+y)\,,\ x+y \succ\, = \,\prec A(x)\,,\ x \succ + 2\mathcal{R}e\,(\prec A(x)\,,\ y \succ) + \prec A(y)\,,\ y \succ \tag{3.1}$$

et

$$\prec A(x-y)\,,\ x-y \succ\, = \,\prec A(x)\,,\ x \succ - 2\mathcal{R}e\,(\prec A(x)\,,\ y \succ) - \prec A(y)\,,\ y \succ \tag{3.2}$$

En soustrayant la formule 3.2 de la formule 3.1 on obtient,

$$4\mathcal{R}e\,(\prec A(x)\,,\ y \succ) = \,\prec A(x+y)\,, x+y \succ - \prec A(x-y)\,, x-y \succ \leq\ M\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

D'où, par utilisation de la régle du parallélogramme,

$$4\mathcal{R}e\,(\prec A(x)\,,\ y \succ) \leq 2M\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 4M \tag{3.3}$$

Posons :

$$\prec A(x)\,,\ y \succ\, = e^{i\theta}\ |\prec A(x)\,,\ y \succ| \qquad \theta \in [0,\ 2\pi]$$

En remplaçant dans 3.3, $x$ par $e^{-\,i\theta}\,x$, on obtient :

$$|\prec A(x)\,,\ y \succ| = \mathcal{R}e\left(\prec A\left(e^{-\,i\theta}\ x\right),\ y \succ\right) \leq M$$

D'où, en posant $y = \frac{A(x)}{\|A(x)\|}$,

$$\left|\prec A(x)\,,\ \frac{A(x)}{\|A(x)\|} \succ\right| = \|A(x)\| \leq M,$$

ce qui signifie que $\|A\| \leq M$. ■

**Proposition 3.1.3** *1. Les valeurs propres d'un opérateur borné auto-adjoint sont réelles.*

2. *Deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes d'un opérateur auto-adjoint borné sont orthogonaux (et donc linéairement indépendants).*
3. *Le spectre résiduel d'un opérateur auto-adjoint borné $A$ est vide.*

**Preuve.**

1. Soit $\lambda$ une valeur propre de l'opérateur auto-adjoint borné $A$ et soit $x_\lambda \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors,

$$\begin{aligned} \lambda\,\|x_\lambda\|^2 &= \lambda < x_\lambda,\ x_\lambda > = < \lambda x_\lambda,\ x_\lambda > = < A(x_\lambda),\ x_\lambda > \\ &= < x_\lambda, A(\ x_\lambda) > = < x_\lambda,\ \lambda x_\lambda > = \ \overline{\lambda} < x_\lambda,\ x_\lambda > . \end{aligned}$$

2. Considérons deux vecteurs propres $x_1$ et $x_2$ de $A$, associés à deux valeurs propres distainctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$. Alors,

$$\lambda_1 \prec x_1,\ x_2 \succ\, = \,\prec A(x_1)\,,\ x_2 \succ\, = \,\prec x_1,\ A(x_2) \succ\, = \ \lambda_2 \prec x_1,\ x_2 \succ$$

Comme $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont différentes alors, forcément $\prec x_1,\ x_2 \succ = 0$.

3. Supposons que $\lambda$ appartient au spectre résiduel de $A$. On sait déjà que dans ce cas,

$$\lambda \notin \sigma_p(A) \quad \text{et} \quad \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A).$$

On peut déjà affirmer d'après le point 1 que $\lambda$ est une valeur réelle, ce qui conduit à la contradiction suivante :

$$\lambda \notin \sigma_p(A) \quad \text{et} \quad \lambda \in \sigma_p(A).$$

■

Pour la suite, nous avons besoin du résultat suivant.

**Lemme 3.1.4** *Si $H$ est un espace de Hilbert et $A$ -un opérateur linéaire borné dans $H$ alors,*

$$H = \mathcal{N}(A^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A^*)} \quad (\oplus \text{ symbole de la somme orthogonale})$$

**Preuve.** Pour tous $x_1 \in H$ et $x_2 \in \ker(A^*)$,

$$\prec A(x_1), \ x_2 \succ = \prec x_1, \ A^*(x_2) \succ = \prec x_1, \ 0 \succ = 0$$

Donc, $\mathcal{N}(A^*) \perp \overline{\mathcal{R}(A)}$ (équivalent à $H = \mathcal{N}(A^*) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$ ) Pour montrer la relation $H = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A^*)}$ , on adopte le même raisonnement en remplaçant $A$ par $A^*$. ■

**Proposition 3.1.5** *Soient $A$ un opérateur auto-adjoint borné dans $H$ et $\lambda$ un nombre réel et . Alors,*

1. $$\lambda \in \sigma_p(A) \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{R}(A - \lambda.Id_H)} \neq H$$
2. $$\lambda \in \sigma_c(A) \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{R}(A - \lambda.Id_H)} \neq \mathcal{R}(A - \lambda.Id_H)$$
3. $$\lambda \in \rho(A) \Longleftrightarrow \mathcal{R}(A - \lambda.Id_H) = H$$

**Preuve.** Découle immédiatement de la relation

$$H = \mathcal{N}(A - \lambda.Id_H) \oplus \overline{\mathcal{R}(A - \lambda.Id_H)}$$

■

**Theorème 3.1.6** *Soit $A$ un un opérateur auto-adjoint borné, défini dans un Hilbert complexe $H$. Alors son spectre est réel, de plus, pour toute valeur complexe $\lambda = a + ib \quad (b \neq 0)$,*

$$\left\| (A - \lambda.Id_H)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|b|} \tag{3.4}$$

**Preuve.** Soit $\lambda = a+ib$ avec $b \neq 0$. D'après ce qui précède, $\lambda \notin \sigma_p(A)$ et donc, $\overline{\mathcal{R}(A - \lambda.Id_H)} = H$. l'opérateur $(A - \lambda.Id_H)^{-1}$ existe, est défini dans tout $H$ et est borné en raison du théorème de l'isomorphisme de Banach. De plus, pour tout $x \in H$,

$$\begin{aligned}
\|(A - \lambda.Id_H)(x)\|^2 &= \prec (A - a.Id_H)(x) - ib.x, \ (A - a.Id_H)(x) - ib.x \succ \\
&= \begin{pmatrix} \|(A - a.Id_H)(x)\|^2 + ib \prec (A - a.Id_H)(x), \ x \succ \\ -ib \prec x, \ (A - a.Id_H)(x) \succ + b^2 \|x\|^2 \end{pmatrix} \\
&= \|(A - a.Id_H)(x)\|^2 + b^2 \|x\|^2 \geq b^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|x\| \leq \frac{1}{|b|} \|(A - \lambda.Id_H)(x)\| \tag{3.5}$$

Si on pose

$$y = (A - \lambda.Id_H)(x),$$

la formule 3.5 devient,

$$\left\| (A - \lambda.Id_H)^{-1}(y) \right\| \leq \frac{1}{|b|} \|y\| \qquad \forall y \in H,$$

ce qui signifie le résultat recherché. ■

## 3.2 Etude spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Commençons cette section par rappeler le résultant suivant déjà énoncé et établi dans le chapitre précédent.

**Theorème 3.2.1** *(Propriétés du spectre d'un opérateur compact) Soit $A$ un opérateur compact dans un espace de Hilbert séparable $H$ $\quad (A \in \mathcal{K}(H))$. On suppose que l'espace $H$ est de dimension infinie. Alors,*

1. $0 \in \sigma(A)$.
2. $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$ *et toute valeur propre non nulle est de multiplicité finie.*
3. *Pour tout $\delta \succ 0$, l'ensemble des valeurs deux à deux distinctes et en module supérieures ou égales à $\delta$ est fini.*
4. $\sigma(A)$ *est au plus infini dénombrable.*
5. *Si $\sigma(A)$ est constitué d'une suite infinie de valeurs deux à deux distinctes alors, cette suite converge vers $0$.*

**Corollaire 3.2.2** *Pour tout $\delta \succ 0$, il n'existe qu'un nombre fini de vecteurs linéairement indépendants correspondants à des vleurs propres en module supérieures ou égales à $\delta$.*
***Preuve.*** *découle du point 3 du théorème précédent et du fait que toute valeur propre non nulle de $A$ est de dimension finie.* ■

**Proposition 3.2.3** *Soient $A$ un opérateur compact dans un Hilbert $H$ et $\lambda \neq 0$. Alors,*

$$\inf \{\|(A - \lambda Id_H) x\| : \ \|x\| = 1\} = 0 \Longrightarrow \lambda \in \sigma_p(A)$$

**Preuve.** Par hypothèse,

$$\exists (x_n)_n \subset H : \quad \|x_n\| = 1 \quad et \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|(A - \lambda Id_H) x_n\| = 0$$

Comme l'opérateur $A$ est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{n_k}$ telle que la suite $(A(x_{n_k}))_{n_k}$ converge vers un élément $y \in H$. Par ailleurs,

$$x_{n_k} = \frac{1}{\lambda} [A(x_{n_k}) - (A - \lambda Id_H) x_{n_k}] \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} x_{n_k} = \frac{1}{\lambda}.y$$

On a en particulier,

$$\|y\| = |\lambda| \quad et \quad y \neq 0$$

De plus,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} A(x_{n_k}) = \frac{1}{\lambda} A(y) \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} A(y) = y \Longrightarrow A(y) = \lambda.y$$

Ainsi donc, $\lambda \in \sigma_p(A)$. ■

**Proposition 3.2.4** *Soit $A$ un opérateur auto-adjoint compact dans un Hilbert $H$. Alors,*

$$\sigma_p(A) \cap \{-\|A\|, \ \|A\|\} \neq \varnothing$$

*En d'autres termes l'une des deux quantités $-\|A\|$ et $\|A\|$ est une valeur propre de $A$.*

**Preuve.** Si $A$ est l'opérateur nul, la réponse est évidente. Supposons que $A$ est différent de l'opérateur nul. On a alors,

$$\|A\| = \sup \{|\prec A(x), \ x \succ| : \ \|x\| = 1\}$$

Par définition du sup, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $H$, vérifiant :

$$\|x_n\| = 1 \quad \forall n \qquad et \qquad \|A\| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} |\prec A(x_n), \ x_n \succ|$$

On peut donc sans restreindre la généralité supposer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \prec A(x_n),\ x_n \succ = \lambda \quad avec \quad \lambda = \pm\|A\|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(A-\lambda Id_H)x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2\lambda \prec A(x_n),\ x_n \succ +\lambda^2 \\ &\leq \|A\|^2 - 2\lambda \prec A(x_n),\ x_n \succ +\lambda^2 \\ &= 2\lambda^2 - 2\lambda \prec A(x_n),\ x_n \succ \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

On en déduit que,

$$\inf\{\|(A-\lambda Id_H)x\| : \ \|x\| = 1\} = 0$$

ce qui signifie d'après la proposition précédente que $\lambda \in \sigma_p(A)$. ■

**Corollaire 3.2.5** *Si $A$ est un opérateur auto-adjoint compact alors, $r(A) = \|A\|$.*

**Theorème 3.2.6** *(de Hilbert-Schmidt) Pour tout opérateur compact auto-adjoint $A$ dans un espace de Hilbert $H$, il existe une famille orthonormée $(u_k)_k$, constituée de vecteurs propres, associés aux valeurs propres non nulles $(\lambda_k)_k$ de $A$, telle que :*

$$x \in H \Longrightarrow x = \sum_k \alpha_k.u_k + x_0, \qquad et \quad A(x) = \sum_k \lambda_k\alpha_k.u_k \tag{3.6}$$

*avec, $\alpha_k \in \mathbb{K}$ et $x_0 \in \mathcal{N}(A)$. De plus, si la famille $(u_k)_k$ est infinie alors,*

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \lambda_k = 0.$$

***Preuve.*** *D'après le théorème 3.2.1, il reste à montrer seulement la décomposition 3.6. Soit $\Lambda = \{\lambda_1,\ \lambda_2, ..\}$ l'ensemble de toutes les valeurs propres non nulles de $A$ (si la multiplicité algébrique de $\lambda$ est $n$ alors, $\lambda$ figurera $n$ -fois dans l'ensemble $\Lambda$). A l'ensemble $\Lambda$ correspond d'après ce qui précède un ensemble $V(\Lambda) = \{u_1,\ u_2, ..\}$ constitué des vecteurs propres orthonormés (donc linéairement indépendants), associés aux valeurs propres $\lambda \in \Lambda$ (en tenant compte des ordres de multiplicité). Par ailleurs, on a la décomposition en somme orthogonale :*

$$H = H_0 \oplus H_1, \quad H_0 = \mathcal{N}(A), \qquad H_1 = \overline{\mathcal{R}(A)} \tag{3.7}$$

*Il est clair que $V(\Lambda) \subset \mathcal{R}(A) \subset H_1$. Montrons que $V(\Lambda)$ est une base orthonormée de $H_1$. Dans le cas contraire, il existe au moins $u \in H_1$ tel que :*

$$u \neq 0 \quad et \quad \prec u,\ v \succ = 0 \quad \forall v \in V(\Lambda) \tag{3.8}$$

*Soit $H_2$ le sous-espace orthogonal à $V(\Lambda)$ dans $H_1$. Alors,et*

$$\forall u \in H_2, \ \ \forall v \in V(\Lambda) : \prec A(u),\ v \succ = \prec u,\ A(v) \succ = 0$$

*Cette dernière formule montre que $H_2$ est invariant pour $A$ $(A(H_2) \subset H_2)$. Donc, l'opérateur*

$$A_2 : H_2 \longrightarrow H_2, \quad u \longmapsto A_2(u) = A(u)$$

*est bien défini, non nul, compact et auto-adjoint. D'après la proposition 3.2.4, il existe une valeur non nulle $\mu$ de $A_2$ telle que $|\mu| = \|A_2\|$. Par construction, $\mu$ est aussi une valeur non nulle $\mu$ de $A$. Or, ceci contredit la définition de $\Lambda$. Par conséquent, l'ensemble $V(\Lambda) = \{u_1,\ u_2, ..\}$ est une base orthonormée de $H_1$.*
*D'après la décomposition 3.7,*

$$x \in H \Longrightarrow x = x_0 + x = \sum_k \alpha_k.u_k \quad et \quad A(x) = \sum_k \lambda_k\alpha_k.u_k$$

*où, $x_0$ est un élément de $\mathcal{N}(A)$.* ■

# Chapitre 4

# Opérateurs unitaires

## 4.1 Définition et premières propriétés

**Définition 4.1.1** *Un opérateur $V$ défini dans un espace de Hilbert $H$ est dit isométrique si,*

$$V^*V = Id \tag{4.1}$$

**Remarque.** Un opérateur isométrique $V$ est injectif. De plus,

$$\|V(x)\| = \|x\| \qquad \forall x \in H \tag{4.2}$$

■

**Exemple 4.1.2** *L'opérateur de décalage unilatéral (shift) :*

$$S : l^2(\mathbb{C}) \longrightarrow l^2(\mathbb{C}), \quad S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$$

*est un opérateur isométrique.*

**Définition 4.1.3** *Un opérateur $U$ défini dans un espace de Hilbert $H$ est dit unitaire si,*

$$U^*U = UU^* = Id \tag{4.3}$$

**Proposition 4.1.4** *On a la proposition de caractérisation suivante :*

$$U \text{ unitaire } \Longleftrightarrow U^* \text{ unitaire } \Longleftrightarrow U \text{ isométrie surjective } \Longleftrightarrow U^* \text{ isométrie surjective}$$

**Remarque.**

1. Tout opérateur unitaire est isométrique mais l'inverse n'est pas vrai.
2. Un opérateur unitaire est inversible de norme 1. Il n'est pas compact (en dimension infinie) et son spectre ne peut contenir la valeur 0.

■

**Exemple 4.1.5** *Soit la fonction $\varphi : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $|\varphi(x)| = 1$ $\forall x \in [a,\ b]$. Alors, l'opérateur*

$$U : L^2_{[a,\ b]} \longrightarrow L^2_{[a,\ b]}\ , \qquad Uf(x) = \varphi(x) f(x) \qquad \forall f \in L^2_{[a,\ b]}$$

*est un opérateur unitaire.*

**Proposition 4.1.6** *Soit $V$ un opérateur isométrique dans un Hilbert $H$. Alors,*

1. $\lambda \in \sigma_p(V) \Longrightarrow |\lambda| = 1$.

*2.* $\lambda \in \sigma_p(V) \Longrightarrow \dfrac{1}{\lambda} \in \sigma_p(V^*)$

*3. Si de plus, $V$ est unitaire alors,* $\sigma_{rés}(V) = \varnothing$.

***Preuve.***

*1. Soit* $\lambda \in \sigma_p(V)$ *et soit* $x_\lambda$ *un vecteur propre associé. Alors, d'après 4.2,*

$$\|x_\lambda\|^2 = \|V(x_\lambda)\|^2 = \prec V(x_\lambda), V(x_\lambda) \succ = \prec \lambda x_\lambda, \lambda x_\lambda \succ = |\lambda|^2 \|x_\lambda\|^2$$

*Comme* $x_\lambda$ *est non nul (vecteur propre) alors, forcément* $|\lambda| = 1$.

*2. D'autre part,*

$$V(x) = \lambda.x \Longrightarrow x = V^* V(x) = V^*(\lambda.x) = \lambda.V^*(x) \Longrightarrow V^*(x) = \frac{1}{\lambda}.x$$

*Donc,* $\dfrac{1}{\lambda} \in \sigma_p(V^*)$.

*3. D'autre part, si $V$ est unitaire alors, $V^*$ l'est aussi. Par conséquent,*

$$\lambda \in \sigma_{rés}(V) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda \notin \sigma_p(V) \\ et \\ \overline{\lambda} \in \sigma_p(V^*) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda \notin \sigma_p(V) \\ et \\ \dfrac{1}{\overline{\lambda}} \in \sigma_p(V) \end{array} \right.$$

*Mais,*

$$\frac{1}{\overline{\lambda}} \in \sigma_p(V) \Longrightarrow \left| \frac{1}{\overline{\lambda}} \right| = 1 = \left| \overline{\lambda} \right| \Longrightarrow \frac{1}{\overline{\lambda}} = \lambda \quad (Contradiction\ \ avec\ \ \lambda \notin \sigma_p(V)).$$

*Donc, $V$ unitaire implique* $\sigma_{rés}(V) = \varnothing$.

■

**Remarque.** Deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes d'un opérateur isométrique $V$, sont orthogonaux. En effet, soit $x_\lambda$ (*resp.* $x_\mu$) un vecteur propre de $V$ associé à la valeur propre $\lambda$ (*resp.* $\mu$). Alors, en utilisant l'égalité $|\lambda| = |\mu| = 1$

$$\lambda \prec x_\lambda, x_\mu \succ = \prec V(x_\lambda), x_\mu \succ = \prec x_\lambda, V^*(x_\mu) \succ = \prec x_\lambda, \frac{1}{\mu} x_\mu \succ = \mu \prec x_\lambda, x_\mu \succ$$

D'où,

$$\lambda \neq \mu \Longrightarrow \prec x_\lambda, x_\mu \succ = 0$$

■

## 4.2 Transformation de Cayley

**Définition 4.2.1** *Soit $A$ un opérateur auto-adjoint borné dans $H$. On appelle transformée de Cayley $A$ l'opérateur :*

$$U = C(A) = (A - iId)(A + iId)^{-1} = Id - 2i(A + iId)^{-1} \tag{4.4}$$

**Remarque.** Comme le spectre de l'opérateur auto-adjoint $A$ est réel, l'opérateur $(A + iId)^{-1}$ est bien défini sur tout $H$ et est borné. Donc, l'opérateur $U$ est aussi bien défini sur tout $H$ et borné. De plus, la relation,

$$Id - U = 2i(A + iId)^{-1}$$

implique que l'opérateur $(Id - U)^{-1}$ est bien défini sur tout $H$ et est borné. On a même la formule de la transfrmation inverse :

$$A = i(Id + U)(Id - U)^{-1} \tag{4.5}$$

■

**Theorème 4.2.2** *La transformée de Cayley d'un opérateur auto-adjoint borné est un opérateur unitaire.*

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} Id - U^*U &= Id_H - (A^* - iId)^{-1}(A^* + iId)(A - iId)(A + iId)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (A^* - iId)^{-1}(A^* - iId)(A + iId)(A + iId)^{-1} \\ -(A^* - iId)^{-1}(A^* + iId)(A - iId)(A + iId)^{-1} \end{pmatrix} \\ &= (A^* - iId)^{-1}\left[(A^* - iId)(A + iId) - (A^* + iId)(A - iId)\right](A + iId)^{-1} \\ &= 2i(A^* - iId)^{-1}(A^* - A)(A + iId)^{-1} = 0 \end{aligned}$$

De la même manière, on montre que :

$$Id - UU^* = 2i(A + iId)^{-1}(A^* - A)(A^* - iId)^{-1} = 0$$

■

**Exercice 4.2.3** *Si $U$ est un opérateur unitaire alors, l'opérateur*

$$A = i(Id + U)(Id - U)^{-1}$$

*est auto-adjoint.*

**Theorème 4.2.4** *Le spectre de la transformée de Cayley $U$ d'un opérateur auto-adjoint borné $A$ est complétement situé sur le cercle unité $S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| = 1\}$.*

**Preuve.** Soient $A$ un opérateur auto-adjoint borné dans $H$ et $U$ sa transformée de Cayley. Soit aussi $\lambda \in \sigma(U), \quad \lambda \neq 1$. On a,

$$\begin{aligned} U - \lambda Id &= (1-\lambda)Id - 2i(A + iId)^{-1} = [(1-\lambda)(A + iId) - 2iId](A + iId)^{-1} \\ &= [(1-\lambda)A - i(1+\lambda)Id](A + iId)^{-1} = (1-\lambda)\left[A - i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}Id\right](A + iId)^{-1} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\lambda \in \sigma(U) \Longleftrightarrow i\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \in \sigma(A) \tag{4.6}$$

En d'autres termes,

$$\sigma(A) = \left\{ i\frac{1+\lambda}{1-\lambda} : \ \lambda \in \sigma(U) \right\}. \tag{4.7}$$

Comme $\mu = i\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$ est réel (car le spectre de $A = A^*$ est réel) alors, on a nécessairement,

$$\lambda = \frac{\mu - i}{\mu + i} \ \in S$$

■

**Remarque.**

1. Le théorème que nous venons d'établir reste vrai dans le cas général c'est à dire même quand l'opérateur unitaire $U$ n'est pas la transformée de Cayley d'un opérateur auto-adjoint borné.

2. Comme le montre l'exemple de l'opérateur de décalage dans $l^2(\mathbb{C})$, un opérateur isométrique non unitaire peut avoir des valeurs du spectre situées à l'intérieur du disque unité ouvert, comme il peut avoir un spectre résiduel non vide.
3. Un calcul direct nous donne :

$$U(x) = \lambda . x \Longleftrightarrow A(y) = i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}y \ , \quad y = (A + iId)^{-1}(x) \neq 0 \tag{4.8}$$

D'où,

$$\sigma_p(A) = \left\{ i\frac{1+\lambda}{1-\lambda} : \ \lambda \in \sigma_p(U) \right\}. \tag{4.9}$$

Par ailleurs, de la relation évidente

$$\mathcal{R}(U - \lambda Id) = \mathcal{R}\left(A - i\frac{1+\lambda}{1-\lambda}Id\right)$$

découle que

$$\sigma_c(A) = \left\{ i\frac{1+\lambda}{1-\lambda} : \ \lambda \in \sigma_c(U) \right\} \tag{4.10}$$

■

**Exercice 4.2.5** *Calculer la transformée de Cayley de l'opérateur auto-adjointn défini dans* $L^2_{([0,\ 1],\ \mathbb{C})}$ *par la formule :*

$$A(x)(t) = tx(t)$$

*et donner son spe*

# Bibliographie


[1] Akhiezer N. I., Glasman M., Theory of operators in Hilbert space, Vyshcha Shkola, Khar'kiv, 1977, English transl. Pitman (APP), 1981.

[2] Bendoukha B., Le simplifié d'algèbre linéaire (disponible sur le site : sites.google.com/site/Bendoukhamaths)

[3] Brésis H., Analyse fonctionnelle et applications, Masson.

[4] Conway J. B, A course in functional analysis, $2^{nd}$ édition, Springer-Verlag, 1990.

[5] Hengartner W., Lambert M., Reischer C. Introduction à l'analyse fonctionnelle, Les presses de l'université du Québec.

[6] Kolmogorov A., Fomine S.. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle. Edition "MIR", Moscow, 1974 (traduit de la langue russe).

[7] Pedersen G. K., Analysis now, Springer-Verlag, 1989.

[8] Schwartz L. Topologie générale et analyse fonctionelle. Edit. Hermann.

[9] Rudin W., Functional analysis, $2^{nd}$ édition, Mc Graw Hill, 1991.

[10] Yosida K. Functional Analysis, Springer-Verlag $6^{th}$ edition, 1980.

[11] Zimmer R. J., Essential results of Functional analysis, University of Chicago press, 1990.