UNIVERSITE des SCIENCES et de la TECHNOLOGIE d'ORAN
Faculté des mathématiques et Informatique, Département de Mathématiques

Année :2016/2017

1^e année Master Analyse mathématique et application.

Module : Théorie spectrale

Série de TD $N°2$

(Projection orthogonale, Opérateurs Adjoints, Théorie spectrale

Exercice 1. 1) Montrer que dans $l^2(\mathbb{R})$.
$F = \{x = (\xi_n)_n \in l^2(\mathbb{R}, \xi_{2n} = -\frac{1}{2}\xi_{2n-1}, n \in \mathbb{N}\}$ est fermé. 2) Soit $(\frac{1}{n})_n$, déterminer P

Exercice 2. Soit $l^p = \{u = (u_i)_{i\geq 0}. \sum_{i\geq 0} |u_i|^p < +\infty\ K = R ou C\}$. On pose

$$\|u\|_{l_p} = \big(\sum_{i\geq 0} |u_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} p\ 1 \leq p < +\infty \text{et pour} p = \infty \|u\|_\infty = max_{i\geq 0}|u_i|$$

Montrer que $\|.\|_{l^p}$ définie une norme sur l^p.

Exercice 3. Montrer que si V est un espace vetoriel de dimension fini ,toutes les normes sont équivalentes ;

Exercice 4. On considère

$$\mathcal{L}^p([a,b]) = \{f : [a,b] \mapsto K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) \text{ mesurable} \int_a^b |f(t)|^p dt\}.$$

On définit une relation d'équivalence R dans $\mathcal{L}^p([a,b])$ par $fRg \Leftrightarrow f = g$ p.p sur $[a,b]$. Montrer que

$$L^p([a,b]) = \mathcal{L}^p([a,b]) \setminus R \quad \text{muni de la norme} \quad \|\dot{f}\| = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \ f \in \dot{f}$$

est un espace de Banach.

Exercice 5. Soit $\delta_0 : \mathcal{C}([0,1]) \to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ la forme linéaire définie par $\delta_0(f) = f(0)$. Montrer qu'elle est continue pur la norme $\|.\|_\infty$mais pas pour la norme $\|.\|_1$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{C}^1([0,1])$ l'espace vectoriel (réel) des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continument dérivable. On pose pour $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$: $\|f\| = (|f(0|^2 + (\int_0^1 |f'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$.
1) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1])$.
2) Montrer que si la suite $(f_n)n \geq 1$ converge pour cette norme,alors elle converge uniformément sur $[0,1]$.
3) On pose $f_n(t) = t^n(1-t)$, $n \geq 1$. Calculer $\|f_n\|$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme de convergence uniforme . On considère l'application linéaire $T : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ définie par $(T(f)(x) = 3f(x) - 2f(x) + 4$. Montrer que T est borné et calculer $\|T\|$