UNIVERSITE des SCIENCES et de la TECHNOLOGIE d'ORAN
Faculté des mathématiques et Informatique, Département de Mathématiques

Année :2019/2020

1^e année Master Analyse mathématique et application.

Matiére : Théorie spectrale

Corrigé de TD $N°2$

(Opérateurs positifs,adjoints , Résolvante ,théorie spectrale d'Opérateurs linéaires bornés

Exercice 1. 1) L'opérateur T étant autoadjoint son spectre est réel d'où i et $-i$ n'appartiennent pas à $\sigma(T)$ et les résolvantes $T+iId_H$ et $T-iId_H$ sont inversibles d'où $(Id_H - iT) = -i(T+iId_H)$ est inversible son inverse est $i(T+iId_H)^{-1}$ et $(Id_H+iT) = i(T-iId_H)$ est inversible d'inverse $-i(T-iId_H)^{-1}$.

2) (Il y a erreur sur la fiche à corriger) On a $(Id_H+iT)(Id_H-iT) = (Id_H-iT)(Id_H+iT) = Id_H + T^2$ alors en multipliant à gauche l'égalité par $((Id_H+iT)^{-1})$ on obtient $((Id_H+iT)^{-1})(Id_H+iT)(Id_H-iT) = ((Id_H+iT)^{-1})(Id_H-iT)(Id_H+iT)$ d'où $(Id_H-iT) = ((Id_H+iT)^{-1})(Id_H-iT)(Id_H+iT)$ puis en multipliant à droite par $((Id_H+iT)^{-1})$ on obtient $(Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = ((T+iId_H)^{-1})(Id_H-iT)(Id_H+iT)((Id_H+iT)^{-1})$ et le résultat $(Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = ((Id_H+iT)^{-1})(Id_H-iT)$

3) $U = (Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = ((Id_H+iT)^{-1})(Id_H-iT) \Rightarrow U^\star = (Id_H - iT)^\star((Id_H+iT)^{-1})^\star = (Id_H+iT^\star)((Id_H-iT^\star)^{-1})$ et comme $T^\star = T$ on obtient $U^\star = (Id_H+iT)((Id_H-iT)^{-1})$

4) $UU^\star = (Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1})(Id_H+iT)((Id_H-iT)^{-1}) = Id_H$ et $U^\star U = (Id_H + iT)((Id_H-iT)^{-1})(Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = Id_H$, U est un opérateur unitaire donc $\|U\| = 1$.

5) $(Id_H+U) = (Id_H+iT)(Id_H+iT)^{-1}) + (Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = (Id_H+iT+Id_H - iT)((Id_H+iT)^{-1}) = 2Id_H((Id_H+iT)^{-1}) = 2((Id_H+iT)^{-1})$ Par conséquent, (Id_H+U) est inversible d'inverse $(Id_H+U)^{-1} = \frac{1}{2}(Id_H+iT)$

On a $(I-U) = (Id_H+iT)(Id_H+iT)^{-1}) - (Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = 2iT(Id_H+iT)^{-1}$ et on a (erreur à corriger sur la fiche) $-i(Id_H-U)(Id_H+U)^{-1} = -i2iT(Id_H+iT)^{-1}\frac{1}{2}(Id_H + iT) = T$.

Exercice 2. Montrons d'abord que l'opérateur $V = TU^2$ est hermitien (autoadjoint), en effet $V^\star = (TUU)^\star = U^\star U^\star T^\star = UUT = U(UT)$ (car T et U sont hermitiens). Comme $UT = TU$; $V^\star = (UT)U = TUU = V$.

D'aute part ,$\forall x \ni H$, $\langle Vx, x\rangle = \langle x, Vx\rangle = \langle x, TU(Ux)\rangle = \langle (TU)^\star x, U(x)\rangle = \langle U(T(x)), U(x)\rangle = \langle T(U(x)), U(x)\rangle \geq 0$ car l'opérateur T est positif :(T est hermitien et $\langle T(x), x\rangle \geq 0$). donc V est positif.

Exercice 3.a) En cours nous posé $(R_T(\lambda) = (T-\lambda Id_H)^{-1})$ en TD non.

Soient $\lambda, \mu \in \varrho(T)$, $R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\lambda Id_H - T)^{-1} - (\mu Id_H - T)^{-1} = (\lambda Id_H - T)^{-1}(Id_H - (\lambda Id_H - T))(\mu Id_H - T)^{-1}) = (\mu - \lambda)R_T(\lambda)R_T(\mu)$.

b) Montrons que $R_T(\lambda)$ est une application analytique Pour cela on vas montrer que $\varrho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, Soit $\lambda_0 \in \varrho(T)$ et montons que la boule $B(\lambda_0, \|R_T(\lambda)\|^{-1}) \subset \varrho(T)$, en effet soit $\lambda \in B(\lambda_0, \|R_T(\lambda)\|^{-1})$

$$(\lambda Id_H - T) = [Id_H - (\lambda_0 - \lambda)R_T(\lambda_0)](\lambda_0 Id_H - T)$$

et comme

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R_T(\lambda_0)\| \leq |(\lambda_0 - \lambda)|\|R_T(\lambda_0)\| \leq 1$$

alors l'opérateur $(\lambda Id_H - T)$ est inversible (Théorème de L'application contractante) et $\lambda \in \varrho(T)$ d'où l'inversibilité de $(\lambda Id_H - T)$ composé de deux applications inversibles et

$$R_T(\lambda) = R_T(\lambda_0)(Id_H - (\lambda_0 - \lambda)R_T(\lambda_0))^{-1}$$

et la série

$$(Id_H - (\lambda_0 - \lambda)R_T(\lambda_0))^{-1} = \sum_{n\geq 1}(\lambda_0 - \lambda)^n(R_T(\lambda_0))^n$$

est normalement convergente dans$B(\lambda_0, \|R_T(\lambda)\|^{-1})$

Ce qui permet de définir l'opérateur analytique

$$R_T(\lambda) = R_T(\lambda_0)\sum_{n\geq 1}(\lambda_0 - \lambda)^n(R_T(\lambda_0))^n = \sum_{n\geq 1}(-1)^n(\lambda - \lambda_0)^n(R_T(\lambda_0))^{n+1}$$

pour tout $\lambda_0 \in \varrho(T)$ et $R_T(\lambda)$ est analytique sur tout l'ouvert $\varrho(T)$.
c) Si $|\lambda| > \|T \mid$ alors $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$. $\|\lambda^{-1}T\| < 1 \Rightarrow Id_H - \lambda^{-1}T$ est inversible (Théorème sur l'application contractante) et on a $(Id_H - \lambda^{-1}T)^{-1} = \sum_{n\geq 0}(\lambda^{-1}T)^n)$ et $R_T(\lambda) = (\lambda Id_H - T)^{-1} = \lambda^{-1}((Id_H - \lambda^{-1}T)^{-1}) = \lambda^{-1}(\sum_{n\geq 0}(\lambda^{-1}T)^n) = \lambda^{-1}\sum_{n\geq 0}(\frac{T^n}{\lambda^n}) = \sum_{n\geq 0}(\frac{T^n}{\lambda^{n+1}})$
d) Par récurrence n=1 $\frac{d}{d\lambda}R_T(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(\lambda Id_H - T)^{-1}) = -(\lambda Id_H - T)^{-2}) = -(R_T(\lambda))^2$
Supposons $\frac{d^n}{d\lambda^n}R_T(\lambda) = (-1)^n n!(R_T(\lambda))^{n+1}$ on a $\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}}R_T(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(-1)^n n!(R_T(\lambda))^{n+1} = (-1)^{n+1}n!(n+1)(\lambda Id_H - T)^{-n-2}) = (-1)^{n+1}n!(n+1)(R_T(\lambda))^{n+2}$