Cours de Théorie spectrale

Hiber Djahida

Année universitaire: 2019/2020

Table des matières

1 Rappel sur les espaces vectoriels normés,espace de Banach,espaces de Hilbert **3**

1.1 Espaces vectoriels normés (e.v.n) 3

1.2 Espace de Banach 4

1.3 Espace de Hilbert 5

1.3.1 Bases Hilbertienne 6

2 Théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés **7**

2.1 Opérateurs linéaires bornés 7

2.1.1 Norme d'un opérateur 8

2.2 Opérateur adjoint 9

2.3 Théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach 10

2.3.1 Décomposition du Spectre d'un opérateur borné 11

2.3.2 Spectre d'un opérateur autoadjoint borné 14

2.4 Théorie spectrale d'un opérateur compact 14

17

Contenu de la matière

1) Rappels sur les opérateurs linéaires bornés dans des espaces de Hilbert. Théorie spectrale d'opérateurs linéaires bornés : Valeurs propres et régulières. Résolvante. Spectre, Spectre continu.
2) Introduction à la théorie d'opérateurs non bornés : Opérateur fermé, Adjoint d'un opérateur, Opérateurs symétriques et auto-adjoints, Opérateurs à résolvante compacte, Opérateurs de Sturm-Liouville,
3) Décomposition polaire et spectrale d'un opérateur auto-adjoint compact.

Référence :

1) **G.Choquet**. Cours d'Analyse, tom2 : Topologie, Masson, 1964.
2) **A. Faisant** : TP et TD de topologie générale, Hermann, 1977.
3) **W.Hengartner, M. Lambert, C.Reischer**.Introduction à l'analyse fonctionnelle. Université du Québec, 1981.
4) **P. Lévy-Bruhl**. Introduction à la théorie spectrale.Dunod.2003.

Chapitre 1

Rappel sur les espaces vectoriels normés,espace de Banach,espaces de Hilbert

1.1 Espaces vectoriels normés (e.v.n)

Définition 1 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application : $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifient :*
- *N_1) $\forall x \in E$ $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*
- *N_2)$\forall x, y \in E$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire)*
- *N_3) $\forall x \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$*

Remarque 1 *Toute norme sur E définit une distance $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ par $\forall x, y \in E$ $d(x, y) = \|x + y\|$*

Définition 2 *Un e.v.n est un couple $(E, \|\cdot\|)$ constitué d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel est d'une norme $\|\cdot\|$ sur cet espace*

Exemple 1
1. *$E = \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$*
2. *$E = l^p(\mathbb{K})\, p \geq 1$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $= \{x = (x_n)_n,\, x_n \in \mathbb{K}, \sum_{i\geq} |x_i|^p < \infty\}$ $\|x\|_p = (\sum_{i\geq} |x_i|^2)^{\frac{1}{p}}$*
3. *$E = L^p(I) = \{f : I \to \mathbb{K}$mesurable $\int_I |f(t)|^p dt < \infty\}$ (deux fonctions f, g presques partout égales sont supposées identiques) $\|f\|_p = (\int_I |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$*

Définition 3 *Soit $(E, \|.\|_E$ un e.v.n. On appelle boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble, $B_O(a, r) = \{x \in E \mid \|x - y.\|_E < r\}$ et boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $B_F(a, r) = \{x \in E \mid \|x - y.\|_E \leq r\}$*

Définition 4 *Une partie M no vide de E est dite ouverte dans $(E, \|.\|_E$ si M peut s'écrire sous forme de boules ouverte de centres $a_i \in M$, $i \in I$ ($M = \bigcup_{i\in I} B_O(a_i, r_i))$*

Définition 5 *On dit qu'un point $a \in E$ adhère à M si toute boule boule ouverte de centre a rencontre M, l'ensemble des points de E adhérents à M est noté $\overline{M}$ ($a \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall r > 0 \ M \bigcap B_O(a, r) \neq \emptyset$*

Définition 6 *Un e.v.n $(E, \|.\|_E$ est dit séparable s'il existe un ensemble dénombrable dense dans E.*

Exemple 2 *$L^p(I)$ est séparable*

1.2 Espace de Banach

Définition 7 *Soit $(E, \|.\|_E$ un e.v.n. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E converge vers $x \in E$ si :*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > n_\epsilon ; \|x_n - x\|_E < \epsilon$$

On écrit $\lim\limits_{n \mapsto \infty} x_n = x$

Remarque 2 *Dans un e.v.n la limite d'une suite convergente est unique.*

Définition 8 *Soit $(E, \|.\|_E$ un e.v.n. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E est de Cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > m \geq n_\epsilon ; \|x_n - x_m\|_E < \epsilon$$

Proposition 1 *Soit $(E, \|.\|_E$ un espace vectoriel normé. alors toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse n'est pas toujours vraie ($(x_n)_n = ((1 + \frac{1}{n})^n)_n \subset (\mathbb{Q}, |.|)$ $\lim\limits_{n \mapsto \infty} x_n = enon \in \mathbb{Q}$*

Définition 9 *Un e.v.n $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach s'il est complet pour la norme $\|.\|_E$ (toute suite de Cauchy est convergente dans E)*

Exemple 3
1. *$(\mathbb{R}, |.|)$, $(\mathbb{K}^n, \|\|_2)$ $\mathbb{K} = \mathbb{R} ou \mathbb{C}$ sont des espaces de Banach*
2. *$(C[a, b], \|.\|_\infty)$ et $L^p((a, b))$ sont des espaces de Banach*
3. *$(C[a, b], \|.\|_1)$ n'est pas un espace de Banach*

1.3 Espace de Hilbert

Définition 10 *Soit H un e.v.n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou$\mathbb{C}$. On appelle produit scalaire toute forme sésquilinéaire, hermitienne et définie positive, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire entre x et y.*

$$\begin{aligned} \langle .,.\rangle : \quad & H \times H \longrightarrow H \\ & (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

qui vérifie :

1. — $\forall y \in H$, $x \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$*linéaire*
   — $\forall x \in H$, $y \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$*vérifie*
   $\alpha y_1 + \beta y_2 \mapsto \overline{\alpha}\langle x, y_1\rangle + \overline{\beta}\langle x, y_2\rangle$ *(sésquilinéaire dans le cas complexe et bilinéaire dans le cas réel)*
2. $\forall x, y \in H$, $\langle y, x\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ *(hermitienne pour le cas complexe et symétrique pour le cas réel).*
3. $\forall x \in H$, $\langle x, x\rangle \geq 0$ *et* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Définition 11 *Si H est muni d'un produit salaire, on dit que H es un espace préhibertien.*

Exemple 4 1. $H = \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\langle x, x\rangle = xy$

2. $l^2(\mathbb{C}) = \{x = (x_n)_{n\geq 1},\ x_n \in \mathbb{C} | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ $\langle x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$
3. $L^2([0, 1], \mathbb{C}) = \{f : [0, 1] \mapsto \mathbb{C} mesurable | \int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty\}$ *(deux fonctions $f, g \in L^2([0, 1], \mathbb{C}) L^2([0, 1], \mathbb{C}) p.p$ égales sont supposés identiques)* $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$

Proposition 2 *Soit l'application $N : H \to \mathbb{R}+$ par $N(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ définie une norme sur H (norme induit du produit scalaire).*

Proposition 3 *Soit H un espace préhilbertien. On a $\forall x, y \in H$*

— $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(Idendité du parallélogramme)*
— $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\Re(\langle x, y\rangle$
— $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ *(Inégalité de Cauchy Schwartz)*
— $\langle x + y, x + y\rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$ *(Inégalité de Minkovski)*

Définition 12 *Un espace de hilbert est un espace préhibertien complet par rapport à la norme iinduite du produit salaire.*

Proposition 4 *Pour tout $x \in H$, $x^{\perp} = \{y \in H | \langle x, y\rangle = 0\}$ est un s.e.v fermé de H.*
$M^{\perp} = \{y \in H | \langle x, y\rangle = 0 \forall x \in H\} = \bigcap_{x \in M} x^{\perp}$ est un s.e.v fermé de H.

Remarque 3 *1.* $A_1 \neq \emptyset$ $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_2^{\perp} \subset A_1^{\perp}$

2. $A^{\perp} = [A]^{\perp} = \overline{[A]}^{\perp}$, *$[A]$ est le plus petit s.e.v qui contient A.*

Théorème 13 *Soit H un espace de Hilbert, F une partie non vide fermé convexe et $x_0 \in H$ alors il existe un et un seul $y_0 \in H$ telque $\|x_0 - y_0\| = Inf_{y\in F}\|x_0 - y\|$, on note $y_0 = P_F(x_0) \in F$. y_0 est caratérisé par $\Re\langle x_0 - y_0, y - y_0\rangle \leq 0$, $\forall y \in F$*

Théorème 14 *Si F est un s.e.v fermé de H, alors l'application :$P_F : H \mapsto F$ est une application linéaire continue et $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ telque $x - y \in F^{\perp}$*

1.3.1 Bases Hilbertienne

Définition 15 *(Théorémes d'existences). Soient E un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est orthonormale si :$\forall i \neq j$ $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ et $\langle e_i, e_j\rangle = 1$. Si de plus la famille est totale ($H = \overline{[(e_i)_{i\in\mathbb{N}}]}$)*

Théorème 16 *Tout espace de Hilbert admet une base de Hilbertienne.*

Proposition 5 *Soit E un espace préhilbertien, pour tout système orthonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $x \in E$, la série $\sum_{n\geq 0} |C_n(x)|^2$, $C_n(x) = \langle x, e_n\rangle$ est convergente de somme $\|x\|^2$ et la série $\sum_{n\geq 0}\langle x, e_n\rangle e_n$ de somme x.*

Exemple 5 $H = L^2([0, 1], \mathbb{C})$, *la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_n = \exp 2i\pi nt$ est une base hilbertienne de H*

Chapitre 2

Théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés

2.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 17 *Soient* $(E, \|.\|_E, (F, \|.\|_F)$ *deux* $\mathbb{K}$ *e.v.n.. Un opérateur linéaire borné* $T : E \to F$ *est une application linéaire de* $E \to F$ *qui vérifie :*

$$\exists M \geq 0 \, \forall x \in E \, \|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E$$

Exemple 6

1. *L'opérateur identité*

$$\begin{array}{rl} Id_E : & E \to E \\ x \mapsto & Id_E(x) = x \end{array}$$

$\forall x \in E$, $\|Id_E(x)\|_E = \|x\|_E$

2. *L'opérateur nul* $\forall x \in E$, $\|\theta_E(x)\|_E = \|0x\|_E = \|0x\|_E = \|0\|_E = 0\|x\|_E = 0$
3. *L'opérateur de décalage (Schift)*

$$\begin{array}{rl} S : & l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}) \\ x = (x_n)_n \mapsto & S(x) = (0, x_1, x_2, ., ., ..) \end{array}$$

$\forall x \in l^2(\mathbb{R}) \, \|S(x)\|_{l^2(\mathbb{R})} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{l^2(\mathbb{R})}$

Notation : $L(E, F) = \{T : E \to F, \text{linéaire borné}\}$ Si, on note $L(E)$.
On vérifie facilement que $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Théorème 18 *Soit* $T : E \to F$ *un opérateur linéaire alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. T *est borné*
2. T *est continue sur tout* E
3. T *est continu en* 0

2.1.1 Norme d'un opérateur

Soit $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ linéaire borné On pose

$$\alpha = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F,\ \beta = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F \text{ et } \gamma = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Propriétés

1. Les quantités α, βet γ sont toutes finies et positives
2. $\alpha = \beta = \gamma$

Définition 19 *SoitT* $: (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *linéaire borné. Le nombre* $\alpha = \beta = \gamma$ *est appelé norme d'un opérateur noté* $\|T\|_{L(E,F)}$

Exemple 7

$$1)\ \|Id_E\|_{L(E)} = 1 \quad 2) \quad \|\theta\|_{L(E,F)} = 0 \quad 3) \quad \|S\|_{l^2(\mathbb{R})} = 1$$

Proposition 6 *On a les propriétés suivantes :*

1. $\forall T \in L(E, F)$ $\|T(x)\|_F \leq \|T\|_{L(E,F)} \|x\|_E$
2. $\|T\|_{L(E,F)}$ *défini une norme dans* $L(E, F)$

Théorème 20 *Si* F *est un espace de Banach* $L(E, F)$ *est un espace de Banach.*$L(E, F)$ *(Pour* $F = \mathbb{K}$ $L(E, \mathbb{K}) = E^\star$

Définition 21 *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux espaces normés. On dit que* $T \in L(E, F)$ *est inversible si* T *est bijective et* T^{-1} *est borné(* $T^{-1} \in L(F, E)$*)*
L'ensemble des opérateurs $T \in L(E, F)$ *inversibles est noté* $Iso(E, F)$

Théorème 22 *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $T \in L(E, F)$ *. Si* T *est bijectif alors* T *est inversible (*$T \in Iso(E, F)$*(Si un opérateur* T *linéaire borné est bijectif alors* T^{-1} *est aussi borné)*

Théorème 23 ***(Théoreme de L'application contractante)***
Soient E *un espace de Banach,* $T \in L(E)$ *tel que* $\|T\| < 1$ *alors* $(Id_E - T)$ *est inversible et la série* $\sum_{k \geq 0} T^k$ *est convergente vers* $(Id_E - T)^{-1}$*.*
De plus $\|((Id_E - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{(1 - \|T\|_{L(E)})}$

Preuve 1 *Comme* $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ $k \in \mathbb{N}$ *et* $\|T\| < 1$*, la série* $\sum_{k \geq 0} T^k$ *est normalement convergente (*$\sum_{k \geq 0} \|T\|^k$ *est une série géométrique de raison* $\|T\| < 1$ *donc convergente de somme* S*.*
$ST = TS = \sum_{k \geq 0} T^{k+1} = T^1 + T^2 + .. + T^k + ... = S - Id_E \Rightarrow S(T - Id_E) = -Id_E \Rightarrow S(Id_E - T) = Id_E$ *et* $TS = S - Id_E \Rightarrow ((Id_E - T)S = Id_E$ *donc* $(Id_E - T)$ *est inversible et* $S = (Id_E - T)^{-1}$ *et* $\|(Id_E - T)^{-1}\| = \|S\| \leq \sum_{k \geq 0} \|T\|^k = (1 - \|T\|)^{-1}$

Corollaire 1 *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach,* $Iso(E, F)$ *est un ouvert de* $L(E, F)$

Preuve 2 *Soit* $T_0 \in Iso(E, F)$ *et soit* $T \in L(E, F)$ *telque* $\|T - T_0\| < \frac{1}{\|T_0\|^{-1}} \Rightarrow \|Id_E - T \circ T_0\| = \|(T_0 - T)T_0^{-1}\| \leq \|(T_0 - T)\| \|T_0^{-1}\| < 1 \Rightarrow TT_0 = Id_E - (Id_E - TT_0)$ *est inversible et* $T = TT_0^{-1}T_0$ *est inversible.*

2.2 Opérateur adjoint

Définition 24 *Soient* $(H_1, \langle , \rangle_{H_1})$ *et* $(H_2, \langle , \rangle_{H_2})$ *deux* $\mathbb{K}$ *espaces de Hilbert, on apelle adjoint de l'opérateur* $T \in L(H_1, H_2)$ *l'opérateur* $T^\star : H_2 \to H_1$ *telque*

$$\forall x \in H_1 \, \forall y \in H_2 \; \langle T(x), y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star(y) \rangle_{H_1}$$

Proposition 7 *Soit* $T \in L(H_1, H_2)$ *(*$(H_1 \, H_2)$ *deux espaces de Hilbert), il existe un unique* $T^\star \in L(H_2, H_1)$ *et* $\|T^\star\| = \|T\|$*.*

Exemple 8 *Soit* $H = l^2(\mathbb{R})$ *et l'opérateur* $S \in L(l^2(\mathbb{R})$ *définit par*

$$\begin{array}{rl} S: & l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}) \\ x = (x_n)_n \mapsto & S(x) = (0, x_1, x_2, ., x_n., ..) \end{array}$$

L'opérateur adjoint de S *est* $\begin{array}{rl} S^\star: & l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}) \\ y = (y_n)_n \mapsto & S(x) = (y_2, y_3, ., y_n., ..) \end{array}$

Proposition 8 *Soient* $(H_1 \, H_2)$ *deux espaces de Hilbert, on a* $\forall T \in L(H_1, H_2)$

1. $$(T^\star)^\star = T \;\; \|T^\star\|_{L(H_2,H_1)} = \|T\|_{L(H_1,H_2)} \, et \|T^\star \circ T\| = \|T\|^2$$
2. *Si* H_3 *est un espace de Hilbert ,* $S \in L(H_1, H_2)$*,* $T \in L(H_2, H_3)$ *on a* $(T \circ S)^\star = S^\star \circ T^\star$
3. $\ker T^\star = (T(E)^\perp$ *(*$T L(H_1, H_2)$*))*

Définition 25 ***(Opérateur unitaire,normal, autoadjoint et positif)***
Soient $(H_1 \, H_2)$ *deux espaces de Hilbert .*

1. *Un opérateur* $T \in L(H_1, H_2)$ *est dit unitaire si* $T^\star \circ T = Id_{H_1}$ *et* $T \circ T^\star = Id_{H_1}$*.*
2. *Un opérateur* $T \in L(H_1)$ *est dit normal si* $T^\star \circ T = T \circ T^\star$*.*
3. *Un opérateur* $T \in L(H_1)$ *est dit autoadjoint si* $T^\star = T$*.*

4. *Un opérateur $T \in L(H_1)$ est dit positif s'il est autoadjoint et* $\langle T(x), x\rangle_{\langle T(x),y\rangle_{H_2}} \in \mathbb{R}+ \ \forall x \in H_1$.

Proposition 9 *Soient $(H_1\, H_2)$ deux espaces de Hilbert et $T \in L(H_1, H_2)$*

a) *L'opérateur $T^\star \circ T$ de $L(H_1)$ est positif*

b) *L'opérateur T est normal si et seulement si pour tout $x \in H_1$ on a $\|T^\star(x)\| = \|T(x)\|$*

2.3 Théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach

Définition 26 *Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$,on appelle spectre de T et on note $\sigma(T)$ l'ensemble des valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $T - \lambda Id_E$ n'est pas inversible. On appelle résolvante de T l'application qui à $\lambda \in (\mathbb{C} - \sigma(T))$associe $(T - \lambda Id_E)^{-1}$. On la note $R_T(\lambda),\ \lambda \in (\mathbb{C} - \sigma(T))$*

Cas d'espace de dimension finie

Soit E un e.v.n de dimension fini le nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé valeur propre de l'opérateur $T \in L(E)$ si l'équation spectrale $T(x) = \lambda x \Leftrightarrow (T - \lambda Id_E)(x) = 0_E$admet une solution $x \neq 0$ non nulle.
Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de T si et seulement l'opérateur $T_\lambda = (T - \lambda Id_E)$ n'est pas injectif équivalent à n'est pas bijectif ou encore n'est pas inversible. l'opérateur T peut être représenté par une matrice $A = (a_{ij})_{(i=,..,n;j=1,..,n)}$, ce qui fait que la définition généralise cette notion de valeurs propres et vecteurs propres.
L'ensemble des valeurs propres de T est appelé spectre ponctuel de T ($\sigma(T) = \sigma_p(T)$) et l'ensemble de vecteurs propres de Test le sous espace propre associé à la valeur propre λ.
Si $(T - \lambda Id_E)(x) = 0$ n'admet pas de Solution non nulle c'est à dire $(T - \lambda Id_E)$ est injectif donc bijectif alors λ est une valeur régulière de T (l'ensemble résolvant $\varrho(T) = (\mathbb{C} - \sigma(T))$.

Proposition 10 *$\sigma(T)$ est une partie compacte de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R} ou \mathbb{C}$ et $|\lambda| \leq \|T\|$ pour tout $\lambda \in \sigma(T)$*

Preuve 3 *Comme $T \in L(E)$ l'application $(T - \lambda Id_E) \in L(E)$ et* $\begin{array}{ll} F : \mathbb{K} & \to L(E) \\ \lambda & \mapsto (T - \lambda Id_E) \in L(E) \end{array}$
$\varrho(T) = F^{-1}(Iso(E)$ est un ouvert de $\mathbb{K}$ et $\sigma(T) = \mathbb{C} - \varrho(T)$ est fermé.
Si $|\lambda| > \|T\|$ alors $\|Id_E + \frac{1}{\lambda}(T - \lambda Id_E)\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$. Ce qui donne $-\frac{1}{\lambda}(T - \lambda Id_E)$ est inversible et de même $(T - \lambda Id_E)$ est inversible et $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, +\|T\|]$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\sigma(T) \subseteq \overline{D(0, \|T\|)}$ donc $\sigma(T)$ est borné et compact.

Définition 27 *Lorseque* $\sigma(T) \neq \emptyset$ *, on appelle rayon spectrale de* T : $r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}$ $r(T) = \|T\|$.

Exemple 9 $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$ *et l'opérateur* $T : H \to H$ *défini par* $Tf(x) = xf(x)\, x \in [0,1]$ $\|Tf(x)\|^2 = \int_0^1 x^2 f(x)^2 dx \leq \int_0^1 |x^2||f(x)^2|dx \leq \int_0^1 |f(x)^2|dx = \|f\|^2$ *L'équation spectrale* $(T - \lambda Id_E)f(x) = 0\, \forall f \in H, \forall x \in [0,1]$.
$\Rightarrow Tf(x) - \lambda f(x) = 0\, \forall f \in H, \forall x \in [0,1] \Rightarrow xf(x) - \lambda f(x) = 0\, \forall f \in H, \forall x \in [0,1] \Rightarrow xf(x) = \lambda f(x)\, \forall f \in H, \forall x \in [0,1] \Rightarrow (x-\lambda)f(x) = 0\, \forall f \in H, \forall x \in [0,1]$
1) Si λ*non* $\in [0,1]$ $\; x - \lambda \neq 0$ *car* $x \in [0,1]$ *d'où* $\frac{1}{x-\lambda} = \varphi(x)$ *et* $T - \lambda Id_E)^{-1}g(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda}$ *est continue sur* $[0,1]$ *et* $\varrho(T) = \mathbb{C} - [0,1]$.
2) Si $\lambda \in [0,1]$ *il ya une singularité en* $x = \lambda$ *par conséquent* $(T - \lambda Id_E)f$ *n'est pas inversible pour tous les* λ *(pôles en* $x = \lambda$*) donc* $\sigma(T) = [0,1]$
3) Montrons par absurde que $\sigma_p(T) = \emptyset$ *:supposons qu'il existe* $\lambda \in \sigma_p(T)$ *tel que* $(x-\lambda)f(x) = 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) = 0\, \forall x \in [0,1]$ *Contradiction avec la définition de vecteur propre.*

Théorème 28 *Soit* H *un espace de Hilbert*

1. *Soit* $T \in L(H)$*, la résolvante* R_T *est une application holomorphe de l'ensemble* $\varrho(T)$ *dans* $L(H)$ *et vérifie l'équation de la résolvante*

$$R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\lambda - \mu)R_T(\lambda)R_T(\mu)\ \forall \lambda, \mu \in \varrho(T)$$

2. $R_T(\lambda)R_T(\mu) = R_T(\mu)R_T(\lambda)\ \forall \lambda, \mu \in \varrho(T)$

Preuve 4 *Preuve* ***Exercice 3*** *Fiche de TD N°2*

Théorème 29 *(**Formule du rayon spectrale**) Soit* E *un espace de Banach complexe et* $T \in L(H)$ *alors* $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

2.3.1 Décomposition du Spectre d'un opérateur borné

Proposition 11 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et soit* $T \in L(E,F)$ *les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application* T *est injective à image fermé*
2. *Il existe un nombre* $c > 0$ *telque pour tout* $x \in E$ *on ait* $\|T(x)\| \geq c\|x\|$
3. *Il n'existe pas de suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* E *telle que* $\|x_n\| = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\lim_{n\mapsto\infty} \|T(x_n)\| = 0$

Preuve 5 *1.* $(1 \Rightarrow 2)$ *Supposons* 1 *satisfait, Considérons* $T_1 : E \to \Im T$ *définie* $(T_1(x) = T(x))$ *est continue et bijective* ($\Im T$ *est fermé alors* ImT *est un espace de Banach) alors* T_1 *est inversible (d'aprés le théorème de Banach). On pose* $c = \|T_1^{-1}\|^{-1}$ $(T_1^{-1} : \Im T \to E)$ *et* $\|T_1^{-1}(T(x)) \leq \|T_1^{-1}\|\|T(x)\| \Rightarrow \|x\| \leq \|T_1^{-1}\|\|T(x)\| \Rightarrow \|T(x)\| = \|T_1(x)\| =\geq \|T_1\|^{-1}\|x\|$.

2. $(2 \Rightarrow 3)$ *Supposons le contraire de* 3 *: Il existe* $(x_n)_n \subset E$ *telque* $\|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *et d'aprés* 2 $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = 0 \Rightarrow \|x_n\| \leq \frac{1}{c}\|T(x_n)\| \to 0$ *Contradiction.*

3. $(3 \Rightarrow 2)$ *Supposons* 2 *n'est pas satisfaite,*$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (y_n) \in E$ *telque* $n^{-1}\|y_n\| > \|T(y_n)\|$. *On pose* $x_n = \|y_n\|^{-1}y_n$ *et* $\|x_n\| = 1$ *et* $\|T(x_n\| < \frac{1}{n}$ *Conradiction avec* 3.

4. $(2 \Rightarrow 1)$ *montrons que* T *est injective* $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0/etT(x_1 - x_2) \geq c\|x_1 - x_2\| \Rightarrow \|x_1 - x_2\| = 0d\text{'où}\, x_1 = x_2$.
Montrons que T *est à image fermé. Soit* $y \in \overline{\Im T} \Rightarrow \exists (y_n) \subset \Im T$ *et* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *et* $y_n = T(x_n)$ *et* $(x_n)_n \in E \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq c^{-1}\|y_n - y_m\|$ *(d'aprés* 2*) la suite de Cauchy* (x_n) *est de Cauchy dans* E *donc convergente (*E *est de Banach)* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$ *(* T *est borné) donc* $y = T(x)$ *et* $\Im T$ *est fermé.*

Lemme 1 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach, un* $T \in L(E, F)$ *est inversible si et seulement si il vérifie les deux propriétées suivantes :*

a) *Il existe un nombre* $c > 0$ *telque pour tout* $x \in E$ *on ait* $\|T(x)\| \geq c\|x\|$

b) $\overline{T(E)} = F$

Spectre dans $\boldsymbol{L}(E)$

Soient E un espaces de Banach complexe, $T \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, nous distinguons plusieurs cas pour l'opérateur $T_\lambda = (T - \lambda Id_E)$ correspondant aux valeur λ.

1. Le sacalaire λ est une valeur propre de T, ceci équivaut à dire que $(T - \lambda Id_E)$ n'est pas injectif ;
2. Le scalaire λ est telque $(T - \lambda Id_E)$ est injective mais n'as pas une image dense dans E.
3. Le scalaire λ est telque $(T - \lambda Id_E)$ est injective et à image dense dans E mais pas fermé

Définition 30 *Soient* E *un espaces de Banach complexe et* $T \in L(E)$,

1. On appelle spectre ponctuel de T *l'ensemble* $\sigma_p(T)$ *des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *telque* $(T - \lambda Id_E)$ *n'est pas injectif*

2. *On appelle spectre résiduel de T l'ensemble $\sigma_r(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ telque $(T - \lambda Id_E)$ est injectif mais son image n'est pas dense $\overline{\Im(T - \lambda Id_E)} \neq E$*
3. *On appelle spectre continu de T l'ensemble $\sigma_c(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ telque $(T - \lambda Id_E)$ est injectif, son image est dense $\overline{\Im(T - \lambda Id_E)} = E$ et pas fermé*

Proposition 12 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in L(H)$, alors :*

1. $\sigma(T^\star) = \overline{\sigma(T)} = \{\overline{\lambda}, \lambda non \in \varrho(T)\}$
2. $\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow \lambda non \in \sigma_p(T) et \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^\star)$

Preuve 6 *Preuve sur [3] page* 6 *preuve de la proposition* 1.1.3.

Exemple 10 $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$ *et l'opérateur* $T : H \to H$ *défini par* $Tf(x) = xf(x)\, x \in [0,1]$ *L'opérateur T est autoadjoint (* $\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 xf(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 f(x)\overline{xg(x)}dx = \langle f, Tg\rangle$*)* $\sigma_p(T) = \emptyset$ *et* $\sigma(T) = [0,1]$ *,On a* $\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow \lambda non \in \sigma_p(T)$ *et* $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^\star) = \sigma_p(T)$ *donc* $\sigma_r(T) = \emptyset$ *et* $\sigma_c(T) = [0,1]$

Proposition 13 *Soit H un espace de Hilbert complexe, alors le spectre de tout opérateur linéaire borné dans H est non vide*

Lemme 2 *SI Un opérateur normal $T \in L(H)$ est injectif, il est à image dense. Si l'opérateur normal T vérifie :* (1) $\exists c > 0$ *telque pour tout* $x \in E$ *on ait* $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ *il est inversible*

Preuve 7 *Supposons* $T \in L(H)$ *est normal* $\Leftrightarrow \|T(x)\| = \|T^\star(x)\| \forall x \in H \Leftrightarrow \ker T = \ker T^\star$ *et* $\ker T^\star = (\Im T)^\perp$ *Si T est injective alors* $\ker T = \ker T^\star = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\Im T} = H$. *Si T vérifie* (1) *il est injectif et à image fermé alors* $\overline{\Im T} = \Im T = H$ *d'où T est inversible*

Proposition 14 *Soit H un espace de Hilbert complexe, alors le spectre résiduel de tout opérateur normal est vide*

Preuve 8 *Supposons* $T \in L(H)$ *est normal,* $T_\lambda = T - \lambda Id_H$ *est normal (*

$$T_\lambda \circ T_\lambda^\star = (T - \lambda Id_H)(T^\star - \overline{\lambda} Id_H) = T \circ T^\star - \overline{\lambda} T - \lambda T^\star - \lambda\overline{\lambda} Id_H = (T^\star - \overline{\lambda} Id_H)(T - \lambda Id_H)$$

).
Soit $\lambda \in \sigma(T)$ *on a soit* T_λ *non injective (*$\lambda \in \sigma_p(T)$*) soit* T_λ *injective alors* T_λ *est à image dense (* $\overline{\Im T_\lambda} = H$*) ce qui implique* $\lambda \in \sigma_c(T)$ *d'où* $\sigma_r(T) = \emptyset$

2.3.2 Spectre d'un opérateur autoadjoint borné

Proposition 15 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ autoadjoint, la norme de T est donné par*

$$\|T\|_{L(H)} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$$

Preuve 9 *page* 23 *[3] proposition* 3.1.2

Proposition 16

1. *Les valeurs propres d'un opérateur borné autoadjoint sont réelles*
2. *Deux vecteurs propres associés à deuc valeurs propres distinctes d'un opérateur autoadjoint sont orthogonaux (et donc linéirement indépendants)*
3. *Le spectre résiduel d'un opérateur autoadjoint borné T est vide*

Preuve 10 *page* 24 *[3] proposition* 3.1.3

Lemme 3 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$, alors $H = \ker T^\star \oplus \overline{\Im T} = \ker T \oplus \overline{\Im T^\star}$*

Preuve 11 *Preuve TD*

Proposition 17 *Soit H un espace de Hilbert, $T \in L(H)$ et λ un nombre réel alors :*

1. $\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow \overline{\Im(T - \lambda Id_H)} \neq H$
2. $\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow \overline{\Im(T - \lambda Id_H)} \neq \Im(T - \lambda Id_H)$
3. $\lambda \in \varrho(T) \Leftrightarrow \Im(T - \lambda Id_H) = H$

2.4 Théorie spectrale d'un opérateur compact

Définition 31 *Soient E, F deux espaces de Banach. L'opérateur Linéaire $T : E \to F$ est compact s'il transforme toute partie M borné en un ensemble relativement compact ($\overline{T(M)}$ est compacte.*

Exemple 11

1. *F est de dimension fini ($\dim F < +\infty$), tout opérateur $T \in L(E, F)$ est compact (car si M est borné dans E alors $T(M)$ est un s.e.v de F de dimension fini donc fermé et borné (T est borné) donc compact) c'est un opérateur de rang fini.*
2. *$E = C([0, 1], \|.\|_\infty$ $Id_E : E \to E$ n'est pas compacte (la boule $B(0, 1)$ fermé n'est pas compacte.*

Remarque 4 *1. Un opérateur $T : E \to F$ compact est toujours borné. on note $K(E,F) \subset T \in L(E,F)$ l'ensemble des applications liéaires compactes de E dans F.*

2. $T \in L(E,F)$ est compact si et seulement si l'image $T(B_F$ est relativement compacte (B_F est la boule unité).

Proposition 18 *1. $K(E,F)$ est un s.e.v fermé de $L(E,F)$*

2. Soient Soient E, F et G trois espaces de Banach, $S \in L(E,F)$ et $L(F,G)$ si S ou T est compacte alors $T \circ S$ est compacte. (Dans le cas où E et F sont deux espaces de Hilbert il y à équivalence)

Corollaire 2 *Si $T \in L(E,F)$ est limite en norm e d'une suite d'opérateur de rang fini alors T est compact.*

Proposition 19

Propriété spectrale d'un opérateur compact

Théorème 32 *Soit E un espace de Banach, $T \in K(E)$ alors :*

1. *$\ker(Id_E - T)$ est de dimension finie*
2. *$\Im(Id_E - T)$ est fermé*
3. *Si $(Id_E - T)$ est injectif, alors $(I_E - T)$ est inversible.*

Preuve 12 *Preuve [1] 1)$\ker(Id_E - T)$ est le noyau de l'opérateur continu $Id_E - T$ est un e.v.n fermé donc espace de Banach (montrons qu'il est locaement compact ,c'est à dire : séparé (évident) et tout point $x \in \ker(Id_E - T)$ admet un voisinage compact. Soit B_x la boule unité fermé de centre x de l'espace de Banach $\ker(Id_E - T)$ B_x est fermé dans E et $B_x = T(B_x) \Rightarrow B_x = \overline{B_x} \subseteq \overline{T(B_x}$ est compact (car T est compact. Donc $\ker(Id_E - T)$ est de dimension finie (théorème de Riez) (tout e.v.n localement compat est de dimension finie).*
2) $\ker(Id_E - T)$ est fermé. Soit F un s.e.v fermé telque $E = \ker(Id_E - T) \oplus F$ (c'est possible $x = x + Tx - Tx$), $T_1 = (Id_E - T)|_F$ est injectif sur F d'aprés la proposition 11 T_1 est inversible et $\Im T_1 = \Im Id_E - T$ fermé. 3) Si $(Id_E - T)$ est injectif et $\Im(Id_E - T)$ est fermé il resté à montrer que $\overline{\Im(Id_E - T)} = E$,soit $S : \Im(Id_E - T) \to E$ soit $y \in E \Rightarrow \exists (y_n)_n \in \Im(Id_E - T)$et $\lim_{n\to\infty} y_n = y \Rightarrow \exists (x_n)_n \in E$, $y_n = x_n - T(x_n)$ la suite $(y_n)_n$ est de cauchy dans E car elle est convergente dans un espace de Banach montrons que $(x_n)_n$ est de Cauchy ($\|x_n - x_m\| \le c^{-1} \| \underbrace{(Id_E - T)(x_n - x_m)}_{(y_n - y_m)} \| \le \epsilon$ (proposition 11) donc convergente dans E vers $x \in E$

Théorème 33 *Soit E un espace de Banach de dimension infinie et $T \in K(E,F)$ alors :*

1. $0 \in \sigma(T)$
2. *Toute valeur spectrale* λ *non nulle est une valeur propre(* $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$*) et le sous espace propre* $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id_E)$ *est de dimension finie*
3. $\sigma(T)$ *est dénombrable et s'il est infini, on peut indexer les éléments de* $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *en une suite* $(\lambda)_{n\geq 1}$*qui tend vers* 0

Preuve 13 *Preuve [1]*

Théorème 34 *Soit* T *un opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert séparable* H *non nul. Alors Il existe une base orthonormée* $(e_n)_n$ *de* H *formée de vecteurs propres de* T *et l'on a pour tout* $x \in H$

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

où λ_n *est la valeur propre associée à* e_n

Preuve 14 *Preuve [1] -*$\sigma(T) \neq \emptyset$ *(* T *est borné) il est dénombrable et toute valeur spectrale* λ *est une valeur propre(* $\sigma(T) = 0 \cup \sigma_p(T)$*) et le sous espace propre* $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id_E)$ *est de dimension finie (Théorème* 32*) les valeurs propres de* T *sont rélles et les sous espaces propres sont othogonaux deux à deux (* T*est auto-adjoint), soit une base* B_λ *de* E_λ *posons* $B = \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T)} B_\lambda$ *est un système orthonormé, il reste à montrer que* $\overline{[B]} = H$ *supposons le contraire de cela (c'est à dire* $\overline{[B]} \neq H \Leftrightarrow \overline{[B]}^{\perp} \neq 0 \Leftrightarrow B^{\perp} \neq 0$ *et* $T|_{[B]^\perp}$ *est compact (car si on prend un ensemble borné dans* $[B]^\perp$ *il est borné dans* H *alors* $T(M)$ *est précompact) alors* $T|_{[B]^\perp}$ *admet au moins une valeur propre et cette valeur propre est une valeur propre de* T *ces vecteurs propres sont dans* $[B]$ *et* $[B]^\perp$ *impossible.Donc* $\overline{[B]} = H$
L'opérateur $Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ *car* $\|Ux\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|T\|^2 \|x\|^2$ *(car* $|\lambda_n| \leq \|T\|$*) et* $U(e_n) = \lambda_n e_n = Te_n \, \forall n \geq 1$ *. On a* $U = T$

Bibliographie

[1] D.Lie *Cours d'analyse foncctionnelle ave 200 Exercices corrigés*, Ellipses 2013.

[2] K. Ammari et H.Skhiri *Elements d'analyse fonctionnelle : cours et exercices acvec solutions* , Centre de Publication Universitaire,2011.

[3] B. Bendoukha, (*THEORIE SPECTRALE DES OPERRATEURS DANS LES ESPACES DE HILBERT.*) Site internet