UNIVERSITE des SCIENCES et de la TECHNOLOGIE d'ORAN
Faculté des mathématiques et Informatique, Département de Mathématiques

Année :2019/2020

1^e année Master Analyse mathématique et application.

Matiére : Théorie spectrale

Corrigé de TD $N°2$

(Opérateurs positifs,adjoints , Résolvante ,théorie spectrale d'Opérateurs linéaires bornés

Exercice 1. 1) L'opérateur T étant autoadjoint son spectre est réel d'où i et $-i$ n'appartiennent pas à $\sigma(T)$ et les résolvantes $T+iId_H$ et $T-iId_H$ sont inversibles d'où $(Id_H - iT) = -i(T + iId_H)$ est inversible son inverse est $i(T+iId_H)^{-1}$ et $(Id_H+iT) = i(T-iId_H)$ est inversible d'inverse $-i(T-iId_H)^{-1}$.

2) (Il y a erreur sur la fiche à corriger) On a $(Id_H+iT)(Id_H-iT) = (Id_H-iT)(Id_H+iT) = Id_H + T^2$ alors en multipliant à gauche l'égalité par $((Id_H+iT)^{-1})$ on obtient $((Id_H+iT)^{-1})(Id_H+iT)(Id_H-iT) = ((Id_H+iT)^{-1})(Id_H-iT)(Id_H+iT)$ d'où $(Id_H-iT) = ((Id_H+iT)^{-1})(Id_H-iT)(Id_H+iT)$ puis en multipliant à droite par $((Id_H+iT)^{-1})$ on obtient $(Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = ((T+iId_H)^{-1})(Id_H-iT)(Id_H+iT)((Id_H+iT)^{-1})$ et le résultat $(Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = ((Id_H+iT)^{-1})(Id_H-iT)$

3) $U = (Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = ((Id_H+iT)^{-1})(Id_H-iT) \Rightarrow U^\star = (Id_H - iT)^\star((Id_H+iT)^{-1})^\star = (Id_H+iT^\star)((Id_H-iT^\star)^{-1})$ et comme $T^\star = T$ on obtient $U^\star = (Id_H+iT)((Id_H-iT)^{-1})$

4) $UU^\star = (Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1})(Id_H+iT)((Id_H-iT)^{-1}) = Id_H$ et $U^\star U = (Id_H+iT)((Id_H-iT)^{-1})(Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = Id_H$, U est un opérateur unitaire donc $\|U\| = 1$.

5) $(Id_H+U) = (Id_H+iT)(Id_H+iT)^{-1}) + (Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = (Id_H+iT+Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = 2Id_H((Id_H+iT)^{-1}) = 2((Id_H+iT)^{-1})$ Par conséquent, (Id_H+U) est inversible d'inverse $(Id_H+U)^{-1} = \frac{1}{2}(Id_H+iT)$
On a $(I-U) = (Id_H+iT)(Id_H+iT)^{-1}) - (Id_H-iT)((Id_H+iT)^{-1}) = 2iT(Id_H+iT)^{-1}$ et on a (erreur à corriger sur la fiche) $-i(Id_H-U)(Id_H+U)^{-1} = -i2iT(Id_H+iT)^{-1}\frac{1}{2}(Id_H+iT) = T$.

Exercice 2. Montrons d'abord que l'opérateur $V = TU^2$ est hermitien (autoadjoint), en effet $V^\star = (TUU)^\star = U^\star U^\star T^\star = UUT = U(UT)$ (car T et U sont hermitiens). Comme $UT = TU$; $V^\star = (UT)U = TUU = V$.
D'aute part ,$\forall x \ni H$, $\langle Vx, x\rangle = \langle x, Vx\rangle = \langle x, TU(Ux)\rangle = \langle (TU)^\star x, U(x)\rangle = \langle U(T(x)), U(x)\rangle = \langle T(U(x)), U(x)\rangle \geq 0$ car l'opérateur T est positif :(T est hermitien et $\langle T(x), x\rangle \geq 0$). donc V est positif.

Exercice 3.a) En cours nous posé $(R_T(\lambda) = (T-\lambda Id_H)^{-1})$ en TD non.
Soient $\lambda, \mu \in \varrho(T)$, $R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\lambda Id_H - T)^{-1} - (\mu Id_H - T)^{-1} = (\lambda Id_H - T)^{-1}(Id_H - (\lambda Id_H - T))(\mu Id_H - T)^{-1}) = (\mu - \lambda)R_T(\lambda)R_T(\mu)$.
b) Montrons que $R_T(\lambda)$ est une application analytique Pour cela on vas montrer que $\varrho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, Soit $\lambda_0 \in \varrho(T)$ et montons que la boule $B(\lambda_0, \|R_T(\lambda)\|^{-1}) \subset \varrho(T)$,

en effet soit $\lambda \in B(\lambda_0, \|R_T(\lambda)\|^{-1})$

$$(\lambda Id_H - T) = [Id_H - (\lambda_0 - \lambda)R_T(\lambda_0)](\lambda_0 Id_H - T)$$

et comme

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R_T(\lambda_0)\| \leq |(\lambda_0 - \lambda)|\|R_T(\lambda_0)\| \leq 1$$

alors l'opérateur $(\lambda Id_H - T)$ est inversible (Théorème de L'application contractante) et $\lambda \in \varrho(T)$ d'où l'inversibilité de $(\lambda Id_H - T)$ composé de deux applications inversibles et

$$R_T(\lambda) = R_T(\lambda_0)(Id_H - (\lambda_0 - \lambda)R_T(\lambda_0))^{-1}$$

et la série

$$(Id_H - (\lambda_0 - \lambda)R_T(\lambda_0))^{-1} = \sum_{n\geq 1}(\lambda_0 - \lambda)^n(R_T(\lambda_0))^n$$

est normalement convergente dans $B(\lambda_0, \|R_T(\lambda)\|^{-1})$

Ce qui permet de définir l'opérateur analytique

$$R_T(\lambda) = R_T(\lambda_0)\sum_{n\geq 1}(\lambda_0 - \lambda)^n(R_T(\lambda_0))^n = \sum_{n\geq 1}(-1)^n(\lambda - \lambda_0)^n(R_T(\lambda_0))^{n+1}$$

pour tout $\lambda_0 \in \varrho(T)$ et $R_T(\lambda)$ est analytique sur tout l'ouvert $\varrho(T)$.
c) Si $|\lambda| > \|T\ |$ alors $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$. $\|\lambda^{-1}T\| < 1 \Rightarrow Id_H - \lambda^{-1}T$ est inversible (Théorème sur l'application contractante) et on a $(Id_H - \lambda^{-1}T)^{-1} = \sum_{n\geq 0}(\lambda^{-1}T)^n)$ et $R_T(\lambda) = (\lambda Id_H - T)^{-1} = \lambda^{-1}((Id_H - \lambda^{-1}T)^{-1}) = \lambda^{-1}(\sum_{n\geq 0}(\lambda^{-1}T)^n) = \lambda^{-1}\sum_{n\geq 0}(\frac{T^n}{\lambda^n}) = \sum_{n\geq 0}(\frac{T^n}{\lambda^{n+1}})$
d) Par récurrence n=1 $\frac{d}{d\lambda}R_T(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(\lambda Id_H - T)^{-1}) = -(\lambda Id_H - T)^{-2}) = -(R_T(\lambda))^2$
Supposons $\frac{d^n}{d\lambda^n}R_T(\lambda) = (-1)^n n!(R_T(\lambda))^{n+1}$ on a $\frac{d^{n+1}}{d\lambda^{n+1}}R_T(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(-1)^n n!(R_T(\lambda))^{n+1} = (-1)^{n+1}n!(n+1)(\lambda Id_H - T)^{-n-2}) = (-1)^{n+1}n!(n+1)(R_T(\lambda))^{n+2}$

Exercice 4. 1) $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$, $A : H \to H$ par $Af(t) = tf(t)$, $t \in [0,1]\forall f \in H$ $\|Af\|^2 = \int_0^1 t^2 f^2(t)dt \leq \int_0^1 f^2(t)dt = \|f\|^2$ (A est borné) et $\langle Af, g\rangle = \int_0^1 tf(t)g(t)dt = \int_0^1 tg(t)f(t)dt = \langle f, Ag\rangle$ ($A^\star = A$) (A est hermintien) et d'aprés la proposition 12 page 13 $\lambda \in \sigma_r(A)$ équivaut à λ n'appartient pas $\sigma_p(A)$ et $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^\star) = \sigma_p(A)$ et comme λ est réelle . $\overline{\lambda} = \lambda$ on ne peut avoir en même temps $\lambda \in \sigma_p(A)$ et non dans $\sigma_p(A)$ d'où $\sigma_r(A) = \emptyset$.
2) En cours (Exemple 9 page 12)nous avons montré $\sigma(A) = [0,1]$ et $\sigma_p(A) = \emptyset$ alors $\sigma_c(A) = [0,1]$.
3) $\|A\| = \sup_{\|f\|=1}\langle Af, f\rangle$ (car A est autoadjoint) $\|A\| \leq 1$ soit la fonction $f_\epsilon = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1-\epsilon \\ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & 1-\epsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$ et $\|f_\epsilon\|^2 = \int_{1-\epsilon}^1(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})^2 = \frac{1}{\epsilon}(1-1+\epsilon) = 1$ $Af_\epsilon = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1-\epsilon \\ \frac{t}{\sqrt{\epsilon}} & 1-\epsilon \leq t \leq 1 \end{cases}$
et $\langle Af, f\rangle = \int_{1-\epsilon}^1 \frac{t}{\sqrt{\epsilon}}\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}dt = \int_{1-\epsilon}^1 \frac{t}{\epsilon} = 1 - \frac{\epsilon}{2} > 1-\epsilon$ d'où $\|A\| = 1$et $|\lambda| \leq \|T\| = 1$.
$r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A) = [0,1]\} = 1$.

Exercice 5. 1) T_d et T_g sont des opérteurs linéaires sur $H = l^2(\mathbb{C})$ (facil) $\|T_d(x)\|^2 = \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 = \|x\|^2$ d'où $\|T_d\| \leq 1$ et pour $e_i = (0, 0, ., ., \underbrace{1}_{i}, 0, 0, ...)$ on a $\|T_d(e_i)\| = 1$ donc $\|T_d\| = 1$. On fait la même chose pour T_g on a $\|T_g\| = 1$.

2) $T_gT_dx = T_g(0, x_1, x_2, ..., x_n, ..) = (x_1, x_2, ..., x_n, ..) = x$ et $T_dT_gx = T_d(x_2, x_3, ..., x_n, ..) = (0, x_2, x_3, ..., x_n, ..)$.
3) Les opérateurs T_d et T_g sont linéaires bornés sur H alors lls admettent des opérateurs adjoints $T_d^\star$ et $T_g^\star$ qui sont linéaires et bornés.
On a pour tout $(x, y) \in l^2(\mathbb{C})$, $\langle T_g(x), y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1}\overline{y_i} \sum_{i=2}^{\infty} x_i\overline{y_{i-1}} = \langle x, (0, y_1, y_2, y_3, ...y_n, ..)\rangle = \langle x, T_g^\star(y)\rangle$ donc $T_g^\star(y) = (0, y_1, y_2, y_3, ...y_n, ..) = T_d(y)$,
$T_g^\star = T_d$ et $T_d^\star = (T_g^\star)^\star = T_g$.
4) Commençons par l'opérateur T_d l'équation spectrale est $T_d(x)-\lambda x = 0 \Leftrightarrow (0, x_1, x_2, ..., x_n, ..)-(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, ..., \lambda x_n, ..) = 0 \Leftrightarrow (-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, .., x_n - \lambda x_n, ...) = 0$
donc $\begin{cases} -\lambda x_1 & = 0 \\ x_n - \lambda x_{n+1} = 0 & \forall n \geq 1 \end{cases}$
Si $\lambda = 0$ alors $x_n = 0\, \forall n \geq 1 \Rightarrow x = 0$ alors $\lambda = 0$ n'est ps une valeur propre.
Si $\lambda \neq 0$ alors $x_1 = 0$ et $x_n - \lambda x_{n+1} = 0 \forall n \geq 1$ équivaut à $x_n = 0 \forall n \geq 1$ et $x = 0$ non plus $\lambda \neq 0$ n'est pas une valeur propre donc $\sigma_p(T_d) = \emptyset$ et $\sigma(T_d) \subset B_f(0, \|T_d\| = 1)$
Remarquons que T_d n'est pas surjectif (car $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0, ..)$n'as pas d'antécedant $T_d(x) = e_1 \Leftrightarrow (0, x_1, x_2, ..., x_n, ..) = (1, 0, 0, ..., 0, ..)$ n'as pas de solution dans $l^2(\mathbb{C})$ donc $\lambda = 0$ n'appartient pas à $\sigma(T_d)$.
Soit $\lambda \in B_f(0, 1) \setminus \{0\}$ et montrons que l'opérateur $(T_d - \lambda Id_H)$ n'est pas surjectif. En effet supposons le contraire c'est à dire il existe $x \in l^2(\mathbb{C})$ tel que $T_d(x) - \lambda x = e_1 \Leftrightarrow (-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, .., x_n - \lambda x_n, ...) = (1, 0, 0, ..., 0, ..)$ équivaut à $\begin{cases} -\lambda x_1 & = 1 \\ x_n - \lambda x_{n+1} = 0 & \forall n \geq 1 \end{cases}$
ou encore $x_1 = -\frac{1}{\lambda}$ et $x_n = -(\frac{1}{\lambda})^n\ \forall n \geq 1$.

Or la série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | - (\frac{1}{\lambda})^n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda|}\right)^{2n}$ est divergente car $\frac{1}{|\lambda|} \geq 1$ $(\lambda \in B_f(0, 1)\setminus\{0\})$ par conséquent x ne peut appartenir à $l^2(\mathbb{C})$ et l'opérateur $(T_d-\lambda Id_H)$ n'est pas surjetif donc n'est pas bijectif. On conclue que $\sigma(T_d) = B_f(0, 1)$.
Etudiant pour l'opérateur $T_g = T_d^\star$, $\sigma(T_g) = \{\overline{\lambda}|\lambda \in \sigma(T_d)\}$
(la proposition 12 page 13) L'équation aux valeurs propres s'écrit $T_g(x) - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (x_2, x_3, ..., x_n, ..) - (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n, ..) \Leftrightarrow x_{n+1} - \lambda x_n = 0\, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow x_{n+1} = (\lambda)^n x_1 \forall n \geq 1 \Leftrightarrow x = (\lambda^n x_1)_{n\geq 0]}$ et x_1 quelconque dans $\mathbb{C}$, $x \in l^2(\mathbb{C})$et$x \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n x_1|^2 < \infty$et$x \neq 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$ et $\sigma_p(T_g) = B_O(0, 1)$
On a d'aprés (la proposition 12 page 13) $\lambda \in \sigma_r(T_d) \Leftrightarrow \lambda non \in \sigma_p(T_d)et\overline{\lambda} \in \sigma_p(T_d^\star) = \sigma_p(T_g) \Leftrightarrow \lambda \in B_F(0, 1)et\overline{\lambda} \in \sigma_p(T_d^\star) = B_O(0, 1) \Leftrightarrow |\lambda| = 1$ pour $\sigma_c(T_d) = B_O(0, 1)$ et pour $\sigma_r(T_g) = \emptyset($ car $\lambda \in \sigma_r(T_g) \Leftrightarrow \lambda non \in \sigma_p(T_g)et\overline{\lambda} \in \sigma_p(T_g^\star) = \sigma_p(T_d) = \emptyset)$ et $\sigma_c(T_g) = \{\lambda|\ |\lambda| = 1\}$

Exercice 6. 1) $| Tf(x)-Tf(y) |=| \int_x^y f(t)dt| \leq \|f\|_\infty|x-y|$ pour tout $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$pour $x \in [0, 1]$ lipschitzienne donc continue et T est linéaire (Intégrale). Pour montrer que T est compact on montre que l'image de la boule unité de $C([0, 1], \mathbb{R})$ est relativement compacte, on utilise le théorème d'Arzéla Ascoli - $|T(f)(x)| \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \|f\|_\infty \leq 1$ pour tout $f \in B_(0, 1)$ d'où $T(B)$ est borné et $| Tf(x) - Tf(y) |\leq |x - y|$ pour tout $f \in B(0, 1)$ (d'où l'équicontinuité de $T(B)$ et d'apré Arzéla Ascoli $T(B)$ est relativement compacte) et T est compacte. 2) Pour $\lambda \neq 0$ l'équation $F - \lambda F' = 0$ on a $F(x) = Ce^{\frac{x}{\lambda}}$ où $C \in \mathbb{R}$ et $F(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}G(x)$ $G(x) = \int_0^x g(t)e^{-\frac{t}{\lambda}}dt$ 3) Comme T est compacte $0 \in \sigma(T)$ et si $\lambda \in \sigma(T)$et$\lambda \neq 0$ alors λ est une valeur propre (Théorème 33 page 16) alors pour $\lambda \neq 0$ l'équation spectrale $(Tf - \lambda f)(x) = 0\ \forall f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \Rightarrow$ (Tf est continuement dérivable et $(Tf)' = f$ on peut utiliser 1) en posant $Tf = F$ alors $(T - \lambda I_d)$ est bijective c'est à dire $\lambda \in \varrho(T)$ où encore $\sigma(T) = \{0\}$ mais 0 n'est pas une valeur propre (car $Tf = 0f = 0 \Rightarrow f = (Tf)' = 0$ T est injective.

Exercice 7. 1) Pour montrer que $\overline{T(B_r)}$ est relativement compacte dans $C([0,1])$ on utilise le théorème d'Arzéla Ascoli :- $\overline{T(B_r)}$ est uniformément borné et $\overline{T(B_r)}$ est équicontinue.
Soit $f \in B_r$, on note $\|f\| = \sup_{x\in[01]} |f(x)|$ et $\|K\| = \sup_{(x,y)\in[01]^2} |K(x,y)|$. Pour tout $x \in [01]$, on a $|Tf(x)| \leq \int_0^1 |K(x,y)||f(t)|dt \leq \|f\|\|K\| \leq r\|K\|$ Ceci implique que $T(B_r)$ est inclus dans la boule fermée de $C([0,1])$ de centre 0 et de rayon $r\|K\|$ donc $\overline{T(B_r)}$ est uniformément borné. soit $f \in B_r$ $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq \int_0^1 |K(x,t) - K(y,t)||f(t)|dt \leq r\int_0^1 |K(x,t) - K(y,t)|dt$ or ,K est uniformément continue sur $[0,1]^2$ donc uniformément continue. Pour tout $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ telque pour tout $x, y \in [0,1]$ vérifiant $|x - y| < \eta$, on a $|K(x,t) - K(y,t)| < \frac{\epsilon}{r}$, $\forall t \in [0,1]$. Par suite pour tout $x, y \in [0,1]$ vérifiant $|x - y| < \eta$ $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq \epsilon \forall f \in B_r$ cequi prouve que $T(B_r)$ est relativement compacte.
2) La partie A est bornée d'où il existe $\delta > 0$ tel que $A \subset B_\delta$ donc $T(A) \subset T(B_\delta) \Rightarrow \overline{T(A)} \subset \overline{T(B_\delta)}$ et comme $\overline{T(B_\delta)}$ est compacte alors $\overline{T(A)}$ est compacte (partie fermée dans un compacte)
3)a) On a $\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|T(f)\| = \sup_{\|f\|=1}\{\sup_{x\in[0,1]} |Tf(x)|\} = \sup_{\|f\|=1}\{\sup_{x\in[0,1]} |\int_0^1 xtf(t)dt|\} = 1$ b) T est ompact (d'aprés 1)) et $C([0,1])$ est de dimension infinie alors $\sigma(T) = \{O\} \bigcup \sigma_p(T)$,Soit $\lambda \neq 0 \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow \ker(T - \lambda Id) \neq \{O\}$. Soit $Tf - \lambda f = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ on alors $-\int_0^1 xtf(t)dt = \lambda f(x) \Leftrightarrow x\underbrace{(-\int_0^1 tf(t)dt)}_{C} = \lambda f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{Cx}{\lambda} = ax$ $a \neq 0$ (car $f \neq 0 \Rightarrow C \neq 0$)en remplaçant $f(x) = ax$ on obtient $a(\lambda - \frac{1}{3}) = 0$ et $\lambda = \frac{1}{3}$ donc $\sigma_p(T) = \{\frac{1}{3}\}$