Email : samir.belhenniche@univ-usto.dz

Momentum Theory- Rankine (1865) :

Rankine a proposé une simple théorie de l'action d'hélice basée sur le mouvement axial de l'eau à travers le disque de l'hélice. Cette méthode conduisait à des conclusions concernant l'action de l'hélice qui ont été validées par des méthodes théoriques et expérimentales récentes en tenant compte des considérations suivantes :

— L'hélice opère dans un fluide parfait et n'exprime pas des pertes d'énergie dues à la résistance de frottement.

— L'hélice est remplacée par un disque ayant le même diamètre.

— L'hélice génère une poussée sans produire une rotation dans le fluide.

La théorie de Rankine basée sur ces 03 hypothèses citées au-dessus est connue sous le nom de : « *Axial Momentum theory* ».

Considérons une hélice (actuator) ayant une surface A_0 avec une vitesse d'avance V_A, L'accélération a lieu sur une certaine distance en avant et en arrière du disque d'hélice. La pression dans le fluide diminue progressivement à l'approche du disque, elle augmente soudainement au niveau du disque, puis diminue progressivement à mesure que le fluide quitte le disque (Voir Fi.01).

Selon la théorie, les expressions des pressions et des vitesses sont comme suit :

— Loin devant du disque : p_0 et V_A

— Loin derrière du disque : p_2 et $V_A + v_2$

— Juste devant du disque : p_1 et $V_A + v_1$

— Juste à l'arrière du disque : p_1' et $V_A + v_1$

Pour des raisons de continuité, la vitesse juste devant et juste derrière du disque sont égales.

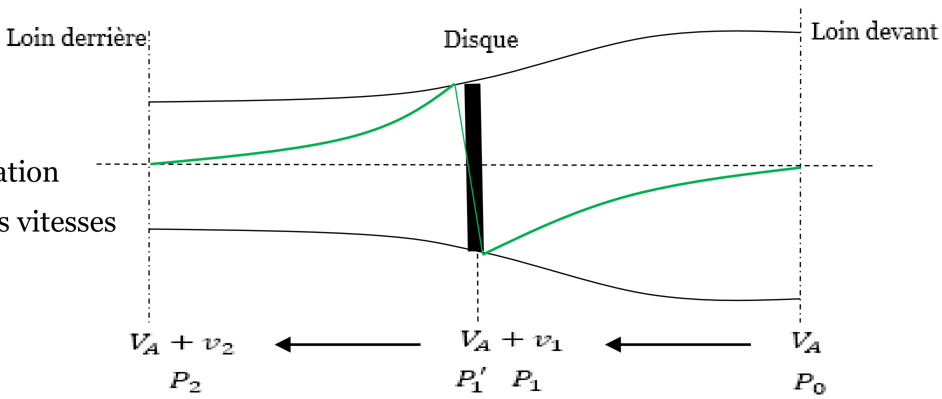

Fig. 01 Représentation des pressions et des vitesses

Email : *samir.belhenniche@univ-usto.dz*

La masse du fluide par unité de temps traversent le disque de l'hélice est donnée comme suit :

$$m = \rho A_0 (V_A + v_1) \tag{1}$$

Avec :

ρ: la masse volumique du fluide.

La masse du fluide est accélérée par l'hélice d'une vitesse V_A à une vitesse $V_A + v_2$, sachant que la poussée est égale au changement de la quantité du mouvement par unité de temps :

$$T = m\,(V_A + v_2 - V_a) = \rho A_0 (V_A + v_1) v_2 \tag{2}$$

La puissance totale P_D délivrée à l'hélice est égale à l'augmentation de l'énergie cinétique par unité de temps :

$$P_D = \frac{1}{2} m\left[(V_A + v_2)^2 - {V_A}^2\right] = \rho A_0 (V_A + v_1) v_2 \left(V_A + \frac{1}{2} v_2\right)$$

$$P_D = T\left(V_A + \frac{1}{2} v_2\right) \tag{3}$$

Cette puissance délivrée est égale aussi le travail fourni par la poussée dans le fluide par unité de temps :

$$P_D = T(V_A + v_1) \tag{4}$$

Et on aura :

$$v_1 = \frac{1}{2} v_2 \tag{5}$$

Le même résultat est obtenu de manière différente par l'application du théorème de Bernoulli aux sections loin devant et à juste avant l'hélice, ainsi qu'aux sections loin derrière et juste derrière l'hélice.

On obtient :

Email : samir.belhenniche@univ-usto.dz

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho {V_A}^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(V_A + v_1)^2 \tag{6}$$

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho(V_A + v_2)^2 = p_1' + \frac{1}{2}\rho(V_A + v_1)^2 \tag{7}$$

On a :

$$p_0 = p_2$$

On obtient :

$$p_1' - p_1 = \frac{1}{2}\rho\left[(V_A + v_2)^2 - {V_A}^2\right]$$

$$p_1' - p_1 = \rho\left(V_A + \frac{1}{2}v_2\right)v_2 \tag{8}$$

La poussée de l'hélice est donnée par :

$$T = (p_1' - p_1)A_0 = \rho A_0\left(V_A + \frac{1}{2}v_2\right)v_2 \tag{9}$$

(2) = (9) et on aura (5).

La puissance utile de l'hélice par unité de temps est TV_a. Le rendement de l'hélice est défini comme suit :

$$\eta_i = \frac{TV_A}{P_D} = \frac{TV_A}{T\left(V_a + \frac{1}{2}v_2\right)} = \frac{1}{1 + \frac{v_1}{V_A}}$$

$$\eta_i = \frac{1}{1 + a} \tag{10}$$

a est le facteur d'écoulement axial. Le rendement $\eta_i$est appelé rendement idéal car la seule perte d'énergie est l'énergie cinétique dissipé derrière l'hélice (zone de sillage). Les autres pertes telles dues à la viscosité, la rotation du fluide et la création de tourbillons sont négligées.

Le coefficient de charge de l'hélice est donné comme suit :

$$C_{T_L} = \frac{T}{{}^{1}\!/_{2}\,\rho A_0 {V_A}^2} \tag{11}$$

Email : *samir.belhenniche@univ-usto.dz*

On remplace la valeur de T à partir de l'équation(2) et on aura : $v_1 = aV_A$et $v_2 = 2aV_A$ et $a = \left(\frac{1}{\eta_i}\right) - 1$ et on obtiendra :

$$\eta_i = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + C_{T_L}}} \tag{12}$$

Il s'agit d'un résultat important, car il montre que le rendement maximal d'une hélice, est limitée à une valeur inférieure à 1, et que ce rendement diminue au fur et à mesure que le coefficient de charge augmente. Il s'ensuit donc que pour une poussée donnée, plus l'hélice est grande, plus son rendement est maximal.

Remarque :

Si C_{T_L}tend vers zéro, c'est-à-dire $T = 0$, le rendement idéal η_i sera égal à 1. Si, d'autre part, V_A tend vers zéro, η_i tend aussi vers zéro, **l'hélice fournit toujours une poussée**. La relation entre la poussée et la puissance délivrée à une vitesse d'avance nulle est intéressante, puisque cette condition représente, le cas **d'un remorqueur appliquant une traction statique**. Pour une hélice, la puissance délivrée est donnée par :

$$P_D = \frac{TV_A}{\eta_i} = \frac{1}{2} TV_A \left(1 + \sqrt{1 + C_{T_L}}\right) \tag{13}$$

Comme V_a tend vers zéro, $1 + \sqrt{1 + C_{T_L}}$ tend vers $\sqrt{C_{T_L}}$ donc :

$$P_D = \frac{1}{2} TV_A \sqrt{C_{T_L}} = \left[\frac{1}{4} T^2 {V_a}^2 \frac{T}{1/2\, \rho A_0 {V_A}^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$P_D = \left[\frac{T^3}{2\rho A_0}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

$$\frac{T}{P_D} \sqrt{\frac{T}{\rho A_0}} = \sqrt{2} \qquad , V_A = 0$$

Application 01 :

Une hélice ayant un diamètre $D = 3\ m$, avançant à une vitesse égale à $4\ m/s$.

Email : *samir.belhenniche@univ-usto.dz*

La vitesse de l'écoulement dans le sillage crée par la rotation de l'hélice est égale à 7,5 m/s.

On se basant sur la théorie de l'actuator :

1. Représenter les vitesses et les pressions loin devant, loin derrière, juste devant et juste à l'arrière de l'hélice ?
2. Calculer les vitesses v_1 et v_2 ?
3. Calculer la poussée et le rendement de l'hélice ?

Solution :

1. Les vitesses et les pressions loin devant loin derrière, juste devant et juste à l'arrière de l'hélice sont représenter dans la figure 01.
2. **Calcul des vitesses v_1 et v_2 :**

   On a :

   $V_A = 4{,}5\ m/s$

   $V_A + v_2 = 7{,}5\ m/s \Rightarrow \ v_2 = 3m/s$

   On a aussi :

   $v_2 = 2v_1 \Rightarrow \ v_1 = 1{,}5\ m/s$

3. **Calcul de la poussée et le rendement de l'hélice :**

   On a :

   $T = \rho A_0(V_A + v_1)v_2$

   $A_0 = \pi D^2/4 \Rightarrow A_0 = 7{,}069\ m^2$

   $T = 1025.7{,}069\ (4{,}5 + 1{,}5).3 \Rightarrow T = 130{,}4KN$

   On a :

   $$\eta_i = \frac{1}{1 + \frac{v_1}{V_A}}$$

   $$\eta_i = \frac{1}{1 + \frac{v_1}{V_A}} = \frac{1}{1 + \frac{1{,}5}{4{,}5}} = 0{,}75$$

   $\eta_i = 0{,}75$

Email : *samir.belhenniche@univ-usto.dz*

Application 02 :

Une hélice est conçue à fournir une poussée de 150 KN à une vitesse d'avance de 6 m/s avec un rendement idéal égal à 0,7. En utilisant le théorème de quantité de mouvement (théorie de l'actuator), calculer le diamètre de l'hélice ?

Solution :

Calcul du diamètre de l'hélice D:

On a :

$$T = \rho A_0 (V_A + v_1) v_2$$

$$\eta_i = \frac{1}{1 + \frac{v_1}{V_A}}$$

$$\eta_i + \eta_i \left(\frac{v_1}{V_A}\right) = 1 \Rightarrow 0{,}7 + 0{,}11666 v_1 = 1$$

$$v_1 = 2{,}57\ m/s$$

On a aussi :

$$v_2 = 2v_1 \Rightarrow v_2 = 5{,}14\ m/s$$

$$A_0 = \frac{T}{\rho(V_A + v_1)v_2} = \frac{150}{1{,}025.(6 + 2{,}57).5{,}14} = 3{,}32 = \pi D^2/4$$

$$D = 2{,}06\ m$$