UNIVERSITE des SCIENCES et de la TECHNOLOGIE d'ORAN
Faculté des mathématiques et Informatique, Département de Mathématiques

Année :2019/2020

1^e année Master Analyse mathématique et application.

Module : Théorie spectrale

Série de TD $N°3$

(Opérateurs non borné, fermé, fermable et théorie spectrale)

Exercice 1. Soit $H = L^2([0, 1]$. On considère l'opératur T non borné, de domaine $D(T) = C([0, 1])$ et défini par $Tf(0) = f(0)$.
Montrer que T est de domaine dense ($\overline{D(T)} = H$) mais il n'est pas fermable.

Exercice 2. Soit $E = C([0, 1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Soit l'opérateur T défini sur $D = C^1([0, 1])$ par $T(f(x) = f'(x)$

1. Montrer que T est fermé à domaine dense.
2. Montrer que $\sigma(T) = \mathbb{C}$

Exercice 3. Soit $H = L^2([0, 1], \mathbb{C})$, on définit les troix opérateurs non bornés :T_1, T_2, etT_3par :

1. $D(T_1) = \{f \in H : f' \in H\} = H^1([0, 1], \mathbb{C})$
2. $D(T_2) = D(T_1) \bigcap \{f \in H;\ f(0 = f(1)\}$
3. $D(T_3) == D(T_1) \bigcap \{f \in H;\ f(0 = f(1) = 0\}$

et $T_k(f) = if'$, $(k = 1, 2, 3)$.
Montrer que :

$$T_1 \subset T_2 \subset T_3 \,\text{et}\, T_1^\star = T_3,\ T_2^\star = T_2\, T_3^\star T_1$$

Exercice 4. Soient $H = L^2(\mathbb{R})$, φ mesurable bornée qui n'apartient pas à H, $f_0 \in H$ et soit $T : H \to H$ de domaine $D(T) = \{f \in H : \int_\mathbb{R} f(t)\overline{\varphi(t)}dt < +\infty\}$ et

$$T(f) = \int_\mathbb{R} f(t)\overline{\varphi(t)}dt$$

.
Montrer que $T^\star = 0$

Exercice 5. Soit Soient E, F deux spaces de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et T un opérateur non linéaire non borné .
Montrer que T est fermé si et seulement si $D(T)$ muni de la norme $\|x\| = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ est un espace de Banach.

Exercice 6. soient H un espace de Hilbert et T un opératur non borné symétrique défini sur $D(T) \subset H$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1. T est auto-adjoint
2. T est fermé et $\ker(T^\star \pm iI_H) = \{0\}$

3. $\Im(T^\star \pm iI_H) = H$

Exercice 7. Soit $H = l^2(\mathbb{C}) = \{x = (x_n)_{n\geq 0}\, x_n \in \mathbb{C};\, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ et $a = (x_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre complexe

l'opérateur $T_a : D \to H$ défini par $T(x) = (a_n x_n)_{n\geq 0}$; où $x = (x_n)_{n\geq 0}$ et et $D = \{x \in l^2(\mathbb{K})\,;\, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|^2 < \infty\}$

1. Montrer que D est dense dans H et que T_a est fermé.
2. Montrer que T_a est fermé si et seulement si $a \in l^\infty(\mathbb{C})$.
3. Déterminer l'adjoint de T_a