Cours de Théorie spectrale

Hiber Djahida

Année universitaire: 2019/2020

Table des matières

Contenu de la matière

1) Rappels sur les opérateurs linéaires bornés dans des espaces de Hilbert. Théorie spectrale d'opérateurs linéaires bornés : Valeurs propres et régulières. Résolvante. Spectre, Spectre continu.
2) Introduction à la théorie d'opérateurs non bornés : Opérateur fermé, Adjoint d'un opérateur, Opérateurs symétriques et auto-adjoints, Opérateurs à résolvante compacte, Opérateurs de Sturm-Liouville,
3) Décomposition polaire et spectrale d'un opérateur auto-adjoint compact.

Référence :

1) **G.Choquet**. Cours d'Analyse, tom2 : Topologie, Masson, 1964.
2) **A. Faisant** : TP et TD de topologie générale, Hermann, 1977.
3) **W.Hengartner, M. Lambert, C.Reischer**.Introduction à l'analyse fonctionnelle. Université du Québec, 1981.
4) **P. Lévy-Bruhl**. Introduction à la théorie spectrale.Dunod.2003.

Chapitre 1

Rappel sur les espaces vectoriels normés,espace de Banach,espaces de Hilbert

1.1 Espaces vectoriels normés (e.v.n)

Définition 1 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application : $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifient :*
- *N_1) $\forall x \in E$ $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*
- *N_2)$\forall x, y \in E$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire)*
- *N_3) $\forall x \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$*

Remarque 1 *Toute norme sur E définit une distance $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ par $\forall x, y \in E$ $d(x, y) = \|x + y\|$*

Définition 2 *Un e.v.n est un couple $(E, \|\cdot\|)$ constitué d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel est d'une norme $\|\cdot\|$ sur cet espace*

Exemple 1
1. *$E = \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$*
2. *$E = l^p(\mathbb{K})\, p \geq 1$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $= \{x = (x_n)_n,\, x_n \in \mathbb{K}, \sum_{i\geq} |x_i|^p < \infty\}$ $\|x\|_p = (\sum_{i\geq} |x_i|^2)^{\frac{1}{p}}$*
3. *$E = L^p(I) = \{f : I \to \mathbb{K}$mesurable $\int_I |f(t)|^p dt < \infty\}$ (deux fonctions f, g presques partout égales sont supposées identiques) $\|f\|_p = (\int_I |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$*

Définition 3 *Soit $(E, \|.\|_E$ un e.v.n. On appelle boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble, $B_O(a, r) = \{x \in E \mid \|x - y.\|_E < r\}$ et boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $B_F(a, r) = \{x \in E \mid \|x - y.\|_E \leq r\}$*

Définition 4 *Une partie M no vide de E est dite ouverte dans $(E, \|.\|_E$ si M peut s'écrire sous forme de boules ouverte de centres $a_i \in M, i \in I$ ($M = \bigcup_{i\in I} B_O(a_i, r_i))$*

Définition 5 *On dit qu'un point $a \in E$ adhère à M si toute boule boule ouverte de centre a rencontre M, l'ensemble des points de E adhérents à M est noté $\overline{M}$ ($a \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall r > 0 \ M \bigcap B_O(a, r) \neq \emptyset$*

Définition 6 *Un e.v.n $(E, \|.\|_E$ est dit séparable s'il existe un ensemble dénombrable dense dans E.*

Exemple 2 *$L^p(I)$ est séparable*

1.2 Espace de Banach

Définition 7 *Soit $(E, \|.\|_E$ un e.v.n. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E converge vers $x \in E$ si :*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > n_\epsilon ; \|x_n - x\|_E < \epsilon$$

On écrit $\lim\limits_{n\mapsto\infty} x_n = x$

Remarque 2 *Dans un e.v.n la limite d'une suite convergente est unique.*

Définition 8 *Soit $(E, \|.\|_E$ un e.v.n. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E est de Cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} | \forall n > m \geq n_\epsilon ; \|x_n - x_m\|_E < \epsilon$$

Proposition 1 *Soit $(E, \|.\|_E$ un espace vectoriel normé. alors toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse n'est pas toujours vraie ($(x_n)_n = ((1 + \frac{1}{n})^n)_n \subset (\mathbb{Q}, |.|)$ $\lim\limits_{n\mapsto\infty} x_n = enon \in \mathbb{Q}$*

Définition 9 *Un e.v.n $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach s'il est complet pour la norme $\|.\|_E$ (toute suite de Cauchy est convergente dans E)*

Exemple 3
1. *$(\mathbb{R}, |.|)$, $(\mathbb{K}^n, \|\|_2)$ $\mathbb{K} = \mathbb{R} ou \mathbb{C}$ sont des espaces de Banach*
2. *$(C[a, b], \|.\|_\infty)$ et $L^p((a, b))$ sont des espaces de Banach*
3. *$(C[a, b], \|.\|_1)$ n'est pas un espace de Banach*

1.3 Espace de Hilbert

Définition 10 *Soit H un e.v.n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou$\mathbb{C}$. On appelle produit scalaire toute forme sésquilinéaire, hermitienne et définie positive, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire entre x et y.*

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : \quad & H \times H \longrightarrow H \\ & (x,y) \mapsto \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

qui vérifie :

1. — $\forall y \in H,\ x \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$*linéaire*
   — $\forall x \in H,\ y \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$*vérifie*
   $\alpha y_1 + \beta y_2 \mapsto \ \overline{\alpha}\langle x, y_1\rangle + \overline{\beta}\langle x, y_2\rangle$ *(sésquilinéaire dans le cas complexe et bilinéaire dans le cas réel)*
2. $\forall x, y \in H,\ \langle y, x\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ *(hermitienne pour le cas complexe et symétrique pour le cas réel).*
3. $\forall x \in H,\ \langle x, x\rangle \geq 0$ *et* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Définition 11 *Si H est muni d'un produit salaire, on dit que H es un espace préhibertien.*

Exemple 4

1. $H = \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\langle x, x\rangle = xy$
2. $l^2(\mathbb{C}) = \{x = (x_n)_{n\geq 1},\ x_n \in \mathbb{C} |\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ $\langle x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$
3. $L^2([0,1], \mathbb{C}) = \{f : [0,1] \mapsto \mathbb{C}mesurable| \int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty\}$ *(deux fonctions $f, g \in L^2([0,1], \mathbb{C}) L^2([0,1], \mathbb{C}) p.p$ égales sont supposés identiques)* $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$

Proposition 2 *Soit l'application $N : H \to \mathbb{R}+$ par $N(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ définie une norme sur H (norme induit du produit scalaire).*

Proposition 3 *Soit H un espace préhilbertien. On a $\forall x, y \in H$*

— $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(Idendité du parallélogramme)*
— $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\Re(\langle x, y\rangle$
— $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ *(Inégalité de Cauchy Schwartz)*
— $\langle x + y, x + y\rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$ *(Inégalité de Minkovski)*

Définition 12 *Un espace de hilbert est un espace préhibertien complet par rapport à la norme iinduite du produit salaire.*

Proposition 4 *Pour tout $x \in H$, $x^{\perp} = \{y \in H | \langle x, y\rangle = 0\}$ est un s.e.v fermé de H.*
$M^{\perp} = \{y \in H | \langle x, y\rangle = 0 \forall x \in H\} = \bigcap_{x\in M} x^{\perp}$ est un s.e.v fermé de H.

Remarque 3 *1.* $A_1 \neq \emptyset$ $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_2^{\perp} \subset A_1^{\perp}$

2. $A^{\perp} = [A]^{\perp} = \overline{[A]}^{\perp}$, *$[A]$ est le plus petit s.e.v qui contient A.*

Théorème 13 *Soit H un espace de Hilbert, F une partie non vide fermé convexe et $x_0 \in H$ alors il existe un et un seul $y_0 \in H$ telque $\|x_0 - y_0\| = Inf_{y \in F}\|x_0 - y\|$, on note $y_0 = P_F(x_0) \in F$. y_0 est caratérisé par $\Re\langle x_0 - y_0, y - y_0\rangle \leq 0$, $\forall y \in F$*

Théorème 14 *Si F est un s.e.v fermé de H, alors l'application :$P_F : H \mapsto F$ est une application linéaire continue et $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ telque $x - y \in F^{\perp}$*

1.3.1 Bases Hilbertienne

Définition 15 *(Théorémes d'existences). Soient E un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est orthonormale si :$\forall i \neq j$ $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ et $\langle e_i, e_j\rangle = 1$. Si de plus la famille est totale ($H = \overline{[(e_i)_{i\in\mathbb{N}}]}$)*

Théorème 16 *Tout espace de Hilbert admet une base de Hilbertienne.*

Proposition 5 *Soit E un espace préhilbertien, pour tout système orthonormal $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout $x \in E$, la série $\sum_{n\geq 0} |C_n(x)|^2$, $C_n(x) = \langle x, e_n\rangle$ est convergente de somme $\|x\|^2$ et la série $\sum_{n\geq 0}\langle x, e_n\rangle e_n$ de somme x.*

Exemple 5 *$H = L^2([0,1],\mathbb{C})$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_n = \exp 2i\pi nt$ est une base hilbertienne de H*

Chapitre 2

Théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés

2.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 17 *Soient* $(E, \|.\|_E, (F, \|.\|_F)$ *deux* $\mathbb{K}$ *e.v.n.. Un opérateur linéaire borné* $T : E \to F$ *est une application linéaire de* $E \to F$ *qui vérifie :*

$$\exists M \geq 0 \, \forall x \in E \, \|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E$$

Exemple 6 1. *L'opérateur identité*

$$\begin{array}{rl} Id_E : & E \to E \\ x \mapsto & Id_E(x) = x \end{array}$$

$\forall x \in E$, $\|Id_E(x)\|_E = \|x\|_E$

2. *L'opérateur nul* $\forall x \in E$, $\|\theta_E(x)\|_E = \|0x\|_E = \|0x\|_E = \|0\|_E = 0\|x\|_E = 0$
3. *L'opérateur de décalage (Schift)*

$$\begin{array}{rl} S : & l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}) \\ x = (x_n)_n \mapsto & S(x) = (0, x_1, x_2, ., ., ..) \end{array}$$

$\forall x \in l^2(\mathbb{R}) \, \|S(x)\|_{l^2(\mathbb{R})} = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{l^2(\mathbb{R})}$

Notation : $L(E, F) = \{T : E \to F, \text{linéaire borné}\}$ Si, on note $L(E)$.
On vérifie facilement que $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Théorème 18 *Soit* $T : E \to F$ *un opérateur linéaire alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. T *est borné*
2. T *est continue sur tout* E
3. T *est continu en* 0

2.1.1 Norme d'un opérateur

Soit $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ linéaire borné On pose

$$\alpha = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F, \ \beta = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F \text{ et } \gamma = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Propriétés

1. Les quantités α, βet γ sont toutes finies et positives
2. $\alpha = \beta = \gamma$

Définition 19 *SoitT* $: (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *linéaire borné. Le nombre* $\alpha = \beta = \gamma$ *est appelé norme d'un opérateur noté* $\|T\|_{L(E,F)}$

Exemple 7

$$1) \ \|Id_E\|_{L(E)} = 1 \quad 2) \quad \|\theta\|_{L(E,F)} = 0 \quad 3) \quad \|S\|_{l^2(\mathbb{R})} = 1$$

Proposition 6 *On a les propriétés suivantes :*

1. $\forall T \in L(E, F)$ $\|T(x)\|_F \leq \|T\|_{L(E,F)} \|x\|_E$
2. $\|T\|_{L(E,F)}$ *défini une norme dans* $L(E, F)$

Théorème 20 *Si F est un espace de Banach* $L(E, F)$ *est un espace de Banach.*$L(E, F)$ *(Pour* $F = \mathbb{K}$ $L(E, \mathbb{K}) = E^\star$

Définition 21 *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux espaces normés. On dit que* $T \in L(E, F)$ *est inversible si* T *est bijective et* T^{-1} *est borné(* $T^{-1} \in L(F, E)$*)*
L'ensemble des opérateurs $T \in L(E, F)$ *inversibles est noté* $Iso(E, F)$

Théorème 22 *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach et* $T \in L(E, F)$ *. Si* T *est bijectif alors* T *est inversible* $(T \in Iso(E, F)$ *(Si un opérateur* T *linéaire borné est bijectif alors* T^{-1} *est aussi borné)*

Théorème 23 ***(Théoreme de L'application contractante)***
Soient E *un espace de Banach,* $T \in L(E)$ *tel que* $\|T\| < 1$ *alors* $(Id_E - T)$ *est inversible et la série* $\sum_{k \geq 0} T^k$ *est convergente vers* $(Id_E - T)^{-1}$.
De plus $\|((Id_E - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{(1 - \|T\|_{L(E)})}$

Preuve 1 *Comme* $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ $k \in \mathbb{N}$ *et* $\|T\| < 1$, *la série* $\sum_{k \geq 0} T^k$ *est normalement convergente* ($\sum_{k \geq 0} \|T\|^k$ *est une série géométrique de raison* $\|T\| < 1$ *donc convergente de somme* S.
$ST = TS = \sum_{k \geq 0} T^{k+1} = T^1 + T^2 + .. + T^k + ... = S - Id_E \Rightarrow S(T - Id_E) = -Id_E \Rightarrow S(Id_E - T) = Id_E$ *et* $TS = S - Id_E \Rightarrow ((Id_E - T)S = Id_E$ *donc* $(Id_E - T)$ *est inversible et* $S = (Id_E - T)^{-1}$ *et* $\|(Id_E - T)^{-1}\| = \|S\| \leq \sum_{k \geq 0} \|T\|^k = (1 - \|T\|)^{-1}$

Corollaire 1 *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach,* $Iso(E, F)$ *est un ouvert de* $L(E, F)$

Preuve 2 *Soit* $T_0 \in Iso(E, F)$ *et soit* $T \in L(E, F)$ *telque* $\|T - T_0\| < \frac{1}{\|T_0\|^{-1}} \Rightarrow \|Id_E - T \circ T_0\| = \|(T_0 - T)T_0^{-1}\| \leq \|(T_0 - T)\| \|T_0^{-1}\| < 1 \Rightarrow TT_0 = Id_E - (Id_E - TT_0)$ *est inversible et* $T = TT_0^{-1}T_0$ *est inversible.*

2.2 Opérateur adjoint

Définition 24 *Soient* $(H_1, \langle, \rangle_{H_1})$ *et* $(H_2, \langle, \rangle_{H_2})$ *deux* $\mathbb{K}$ *espaces de Hilbert, on apelle adjoint de l'opérateur* $T \in L(H_1, H_2)$ *l'opérateur* $T^\star : H_2 \to H_1$ *telque*

$$\forall x \in H_1 \, \forall y \in H_2 \; \langle T(x), y \rangle_{H_2} = \langle x, T^\star(y) \rangle_{H_1}$$

Proposition 7 *Soit* $T \in L(H_1, H_2)$ *(*$(H_1 \, H_2)$ *deux espaces de Hilbert), il existe un unique* $T^\star \in L(H_2, H_1)$ *et* $\|T^\star\| = \|T\|$*.*

Exemple 8 *Soit* $H = l^2(\mathbb{R})$ *et l'opérateur* $S \in L(l^2(\mathbb{R})$ *définit par*

$$\begin{array}{rl} S : & l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}) \\ x = (x_n)_n \mapsto & S(x) = (0, x_1, x_2, ., x_n., ..) \end{array}$$

L'opérateur adjoint de S *est* $\begin{array}{rl} S^\star : & l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}) \\ y = (y_n)_n \mapsto & S(x) = (y_2, y_3, ., y_n., ..) \end{array}$

Proposition 8 *Soient* $(H_1 \, H_2)$ *deux espaces de Hilbert, on a* $\forall T \in L(H_1, H_2)$

1. $$(T^\star)^\star = T \;\; \|T^\star\|_{L(H_2,H_1)} = \|T\|_{L(H_1,H_2)} \; et \|T^\star \circ T\| = \|T\|^2$$
2. *Si* H_3 *est un espace de Hilbert ,* $S \in L(H_1, H_2)$*,* $T \in L(H_2, H_3)$ *on a* $(T \circ S)^\star = S^\star \circ T^\star$
3. $\ker T^\star = (T(E)^\perp$ *(*$T L(H_1, H_2)$*))*

Définition 25 *(* ***Opérateur unitaire,normal, autoadjoint et positif****)*
Soient $(H_1 \, H_2)$ *deux espaces de Hilbert .*

1. *Un opérateur* $T \in L(H_1, H_2)$ *est dit unitaire si* $T^\star \circ T = Id_{H_1}$ *et* $T \circ T^\star = Id_{H_1}$*.*
2. *Un opérateur* $T \in L(H_1)$ *est dit normal si* $T^\star \circ T = T \circ T^\star$*.*
3. *Un opérateur* $T \in L(H_1)$ *est dit autoadjoint si* $T^\star = T$*.*

4. *Un opérateur $T \in L(H_1)$ est dit positif s'il est autoadjoint et* $\langle T(x), x\rangle_{\langle T(x),y\rangle_{H_2}} \in \mathbb{R}+ \ \forall x \in H_1$.

Proposition 9 *Soient $(H_1\, H_2)$ deux espaces de Hilbert et $T \in L(H_1, H_2)$*

a) *L'opérateur $T^\star \circ T$ de $L(H_1)$ est positif*

b) *L'opérateur T est normal si et seulement si pour tout $x \in H_1$ on a $\|T^\star(x)\| = \|T(x)\|$*

2.3 Théorie spectrale des opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach

Définition 26 *Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$,on appelle spectre de T et on note $\sigma(T)$ l'ensemble des valeur $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $T - \lambda Id_E$ n'est pas inversible. On appelle résolvante de T l'application qui à $\lambda \in (\mathbb{C} - \sigma(T))$associe $(T - \lambda Id_E)^{-1}$. On la note $R_T(\lambda),\ \lambda \in (\mathbb{C} - \sigma(T))$*

Cas d'espace de dimension finie

Soit E un e.v.n de dimension fini le nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé valeur propre de l'opérateur $T \in L(E)$ si l'équation spectrale $T(x) = \lambda x \Leftrightarrow (T - \lambda Id_E)(x) = 0_E$admet une solution $x \neq 0$ non nulle.
Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de T si et seulement l'opérateur $T_\lambda = (T - \lambda Id_E)$ n'est pas injectif équivalent à n'est pas bijectif ou encore n'est pas inversible. l'opérateur T peut être représenté par une matrice $A = (a_{ij})_{(i=,..,n;j=1,..,n)}$, ce qui fait que la définition généralise cette notion de valeurs propres et vecteurs propres.
L'ensemble des valeurs propres de T est appelé spectre ponctuel de T ($\sigma(T) = \sigma_p(T)$) et l'ensemble de vecteurs propres de Test le sous espace propre associé à la valeur propre λ.
Si $(T - \lambda Id_E)(x) = 0$ n'admet pas de Solution non nulle c'est à dire $(T - \lambda Id_E)$ est injectif donc bijectif alors λ est une valeur régulière de T (l'ensemble résolvant $\varrho(T) = (\mathbb{C} - \sigma(T))$.

Proposition 10 *$\sigma(T)$ est une partie compacte de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R} ou \mathbb{C}$ et $|\lambda| \leq \|T\|$ pour tout $\lambda \in \sigma(T)$*

Preuve 3 *Comme $T \in L(E)$ l'application $(T - \lambda Id_E) \in L(E)$ et* $\begin{array}{ll} F : \mathbb{K} & \rightarrow L(E) \\ \lambda & \mapsto (T - \lambda Id_E) \in L(E) \end{array}$
*$\varrho(T) = F^{-1}(Iso(E)$ est un ouvert de $\mathbb{K}$ et $\sigma(T) = \mathbb{C} - \varrho(T)$ est fermé.
Si $|\lambda| > \|T\|$ alors $\|Id_E + \frac{1}{\lambda}(T - \lambda Id_E)\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$. Ce qui donne $-\frac{1}{\lambda}(T - \lambda Id_E)$ est inversible et de même $(T - \lambda Id_E)$ est inversible et $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, +\|T\|]$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\sigma(T) \subseteq \overline{D(0, \|T\|)}$ donc $\sigma(T)$ est borné et compact.*

Définition 27 *Lorseque* $\sigma(T) \neq \emptyset$ *, on appelle rayon spectrale de* T : $r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}$ $r(T) = \|T\|$.

Exemple 9 $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$ *et l'opérateur* $T : H \to H$ *défini par* $Tf(x) = xf(x)\, x \in [0,1]$ $\|Tf(x)\|^2 = \int_0^1 x^2 f(x)^2 dx \leq \int_0^1 |x^2||f(x)^2|dx \leq \int_0^1 |f(x)^2|dx = \|f\|^2$ *L'équation spectrale* $(T - \lambda Id_E)f(x) = 0\, \forall f \in H, \forall x \in [0,1]$.
$\Rightarrow Tf(x) - \lambda f(x) = 0\, \forall f \in H, \forall x \in [0,1] \Rightarrow xf(x) - \lambda f(x) = 0\, \forall f \in H, \forall x \in [0,1] \Rightarrow xf(x) = \lambda f(x)\, \forall f \in H, \forall x \in [0,1] \Rightarrow (x-\lambda)f(x) = 0\, \forall f \in H, \forall x \in [0,1]$
1) Si λ*non* $\in [0,1]$ $\;x - \lambda \neq 0$ *car* $x \in [0,1]$ *d'où* $\frac{1}{x-\lambda} = \varphi(x)$ *et* $T - \lambda Id_E)^{-1} g(x) = \frac{g(x)}{x-\lambda}$ *est continue sur* $[0,1]$ *et* $\varrho(T) = \mathbb{C} - [0,1]$.
2) Si $\lambda \in [0,1]$ *il ya une singularité en* $x = \lambda$ *par conséquent* $(T - \lambda Id_E)f$ *n'est pas inversible pour tous les* λ *(pôles en* $x = \lambda$*) donc* $\sigma(T) = [0,1]$
3) Montrons par absurde que $\sigma_p(T) = \emptyset$ *:supposons qu'il existe* $\lambda \in \sigma_p(T)$ *tel que* $(x-\lambda)f(x) = 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) = 0\, \forall x \in [0,1]$ *Contradiction avec la définition de vecteur propre.*

Théorème 28 *Soit* H *un espace de Hilbert*

1. *Soit* $T \in L(H)$, *la résolvante* R_T *est une application holomorphe de l'ensemble* $\varrho(T)$ *dans* $L(H)$ *et vérifie l'équation de la résolvante*

$$R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\lambda - \mu) R_T(\lambda) R_T(\mu) \; \forall \lambda, \mu \in \varrho(T)$$

2. $R_T(\lambda) R_T(\mu) = R_T(\mu) R_T(\lambda) \; \forall \lambda, \mu \in \varrho(T)$

Preuve 4 *Preuve* ***Exercice 3*** *Fiche de TD N°2*

Théorème 29 *(**Formule du rayon spectrale**) Soit* E *un espace de Banach complexe et* $T \in L(H)$ *alors* $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

2.3.1 Décomposition du Spectre d'un opérateur borné

Proposition 11 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et soit* $T \in L(E,F)$ *les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application* T *est injective à image fermé*
2. *Il existe un nombre* $c > 0$ *telque pour tout* $x \in E$ *on ait* $\|T(x)\| \geq c\|x\|$
3. *Il n'existe pas de suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* E *telle que* $\|x_n\| = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\lim_{n\mapsto\infty} \|T(x_n)\| = 0$

Preuve 5 1. $(1 \Rightarrow 2)$ *Supposons* 1 *satisfait, Considérons* $T_1 : E \to \Im T$ *définie* $(T_1(x) = T(x))$ *est continue et bijective* ($\Im T$ *est fermé alors* ImT *est un espace de Banach) alors* T_1 *est inversible (d'aprés le théorème de Banach). On pose* $c = \|T_1^{-1}\|^{-1}$ $(T_1^{-1} : \Im T \to E)$ *et* $\|T_1^{-1}(T(x)) \leq \|T_1^{-1}\|\|T(x)\| \Rightarrow \|x\| \leq \|T_1^{-1}\|\|T(x)\| \Rightarrow \|T(x)\| = \|T_1(x)\| =\geq \|T_1\|^{-1}\|x\|$.

2. $(2 \Rightarrow 3)$ *Supposons le contraire de* 3 *: Il existe* $(x_n)_n \subset E$ *telque* $\|x_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *et d'aprés* 2 $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = 0 \Rightarrow \|x_n\| \leq \frac{1}{c}\|T(x_n)\| \to 0$ *Contradiction.*

3. $(3 \Rightarrow 2)$ *Supposons* 2 *n'est pas satisfaite,*$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (y_n) \in E$ *telque* $n^{-1}\|y_n\| > \|T(y_n)\|$. *On pose* $x_n = \|y_n\|^{-1}y_n$ *et* $\|x_n\| = 1$ *et* $\|T(x_n\| < \frac{1}{n}$ *Conradiction avec* 3.

4. $(2 \Rightarrow 1)$ *montrons que* T *est injective* $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0[et T(x_1 - x_2) \geq c\|x_1 - x_2\| \Rightarrow \|x_1 - x_2\| = 0 d'où\ x_1 = x_2$.
Montrons que T *est à image fermé. Soit* $y \in \overline{\Im T} \Rightarrow \exists (y_n) \subset \Im T$ *et* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *et* $y_n = T(x_n)$ *et* $(x_n)_n \in E \Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq c^{-1}\|y_n - y_m\|$ *(d'aprés* 2*) la suite de Cauchy* (x_n) *est de Cauchy dans* E *donc convergente (*E *est de Banach)* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$ *(* T *est borné) donc* $y = T(x)$ *et* $\Im T$ *est fermé.*

Lemme 1 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach, un* $T \in L(E, F)$ *est inversible si et seulement si il vérifie les deux propriétées suivantes :*

a) *Il existe un nombre* $c > 0$ *telque pour tout* $x \in E$ *on ait* $\|T(x)\| \geq c\|x\|$

b) $\overline{T(E)} = F$

Spectre dans $\boldsymbol{L}(E)$

Soient E un espaces de Banach complexe, $T \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, nous distinguons plusieurs cas pour l'opérateur $T_\lambda = (T - \lambda Id_E)$ correspondant aux valeur λ.

1. Le sacalaire λ est une valeur propre de T, ceci équivaut à dire que $(T - \lambda Id_E)$ n'est pas injectif ;
2. Le scalaire λ est telque $(T - \lambda Id_E)$ est injective mais n'as pas une image dense dans E.
3. Le scalaire λ est telque $(T - \lambda Id_E)$ est injective et à image dense dans E mais pas fermé

Définition 30 *Soient* E *un espaces de Banach complexe et* $T \in L(E)$*,*

1. *On appelle spectre ponctuel de* T *l'ensemble* $\sigma_p(T)$ *des* $\lambda \in \mathbb{C}$ *telque* $(T - \lambda Id_E)$ *n'est pas injectif*

2. *On appelle spectre résiduel de T l'ensemble $\sigma_r(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ telque $(T - \lambda Id_E)$ est injectif mais son image n'est pas dense $\overline{\Im(T - \lambda Id_E)} \neq E$*
3. *On appelle spectre continu de T l'ensemble $\sigma_c(T)$ des $\lambda \in \mathbb{C}$ telque $(T - \lambda Id_E)$ est injectif, son image est dense $\overline{\Im(T - \lambda Id_E)} = E$ et pas fermé*

Proposition 12 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in L(H)$, alors :*

1. $\sigma(T^\star) = \overline{\sigma(T)} = \{\overline{\lambda}, \lambda non \in \varrho(T)\}$
2. $\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow \lambda non \in \sigma_p(T) et \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^\star)$

Preuve 6 *Preuve sur [3] page* 6 *preuve de la proposition* 1.1.3.

Exemple 10 $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$ *et l'opérateur* $T : H \to H$ *défini par* $Tf(x) = xf(x)\, x \in [0,1]$ *L'opérateur T est autoadjoint (* $\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 xf(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 f(x)\overline{xg(x)}dx = \langle f, Tg\rangle$ *)* $\sigma_p(T) = \emptyset$ *et* $\sigma(T) = [0,1]$ *,On a* $\lambda \in \sigma_r(T) \Leftrightarrow \lambda non \in \sigma_p(T)$ *et* $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^\star) = \sigma_p(T)$ *donc* $\sigma_r(T) = \emptyset$ *et* $\sigma_c(T) = [0,1]$

Proposition 13 *Soit H un espace de Hilbert complexe, alors le spectre de tout opérateur linéaire borné dans H est non vide*

Lemme 2 *SI Un opérateur normal $T \in L(H)$ est injectif, il est à image dense. Si l'opérateur normal T vérifie :* (1) $\exists c > 0$*telque pour tout* $x \in E$*on ait* $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ *il est inversible*

Preuve 7 *Supposons* $T \in L(H)$*est normal* $\Leftrightarrow \|T(x)\| = \|T^\star(x)\| \forall x \in H \Leftrightarrow \ker T = \ker T^\star$*et*$\ker T^\star = (\Im T)^\perp$ *Si T est injective alors* $\ker T = \ker T^\star = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\Im T} = H$*. Si T vérifie* (1) *il est injectif et à image fermé alors* $\overline{\Im T} = \Im T = H$ *d'où T est inversible*

Proposition 14 *Soit H un espace de Hilbert complexe, alors le spectre résiduel de tout opérateur normal est vide*

Preuve 8 *Supposons* $T \in L(H)$*est normal,* $T_\lambda = T - \lambda Id_H$ *est normal (*

$$T_\lambda \circ T_\lambda^\star = (T - \lambda Id_H)(T^\star - \overline{\lambda} Id_H) = T \circ T^\star - \overline{\lambda} T - \lambda T^\star - \lambda\overline{\lambda} Id_H = (T^\star - \overline{\lambda} Id_H)(T - \lambda Id_H)$$

).
Soit $\lambda \in \sigma(T)$ on a soit T_λ non injective ($\lambda \in \sigma_p(T)$) soit T_λ injective alors T_λ est à image dense ($\overline{\Im T_\lambda} = H$ *) ce qui implique* $\lambda \in \sigma_c(T)$ *d'où* $\sigma_r(T) = \emptyset$

2.3.2 Spectre d'un opérateur autoadjoint borné

Proposition 15 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ autoadjoint, la norme de T est donné par*

$$\|T\|_{L(H)} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$$

Preuve 9 *page* 23 *[3] proposition* 3.1.2

Proposition 16

1. *Les valeurs propres d'un opérateur borné autoadjoint sont réelles*
2. *Deux vecteurs propres associés à deuc valeurs propres distinctes d'un opérateur autoadjoint sont orthogonaux (et donc linéirement indépendants)*
3. *Le spectre résiduel d'un opérateur autoadjoint borné T est vide*

Preuve 10 *page* 24 *[3] proposition* 3.1.3

Lemme 3 *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$, alors $H = \ker T^\star \oplus \overline{\Im T} = \ker T \oplus \overline{\Im T^\star}$*

Preuve 11 *Preuve TD*

Proposition 17 *Soit H un espace de Hilbert, $T \in L(H)$ et λ un nombre réel alors :*

1. $\lambda \in \sigma_p(T) \Leftrightarrow \overline{\Im(T - \lambda Id_H)} \neq H$
2. $\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow \overline{\Im(T - \lambda Id_H)} \neq \Im(T - \lambda Id_H)$
3. $\lambda \in \varrho(T) \Leftrightarrow \Im(T - \lambda Id_H) = H$

2.4 Théorie spectrale d'un opérateur compact

Définition 31 *Soient E, F deux espaces de Banach. L'opérateur Linéaire $T : E \to F$ est compact s'il transforme toute partie M borné en un ensemble relativement compact ($\overline{T(M)}$ est compacte.*

Exemple 11

1. *F est de dimension fini ($\dim F < +\infty$), tout opérateur $T \in L(E, F)$ est compact (car si M est borné dans E alors $T(M)$ est un s.e.v de F de dimension fini donc fermé et borné (T est borné) donc compact) c'est un opérateur de rang fini.*
2. *$E = C([0,1], \|.\|_\infty$ $Id_E : E \to E$ n'est pas compacte (la boule $B(0,1)$ fermé n'est pas compacte.*

Remarque 4 *1. Un opérateur $T : E \to F$ compact est toujours borné. on note $K(E,F) \subset T \in L(E,F)$ l'ensemble des applications liéaires compactes de E dans F.*

2. $T \in L(E,F)$ est compact si et seulement si l'image $T(B_F$ est relativement compacte (B_F est la boule unité).

Proposition 18 *1. $K(E,F)$ est un s.e.v fermé de $L(E,F)$*

2. Soient Soient E, F et G trois espaces de Banach, $S \in L(E,F)$ et $L(F,G)$ si S ou T est compacte alors $T \circ S$ est compacte. (Dans le cas où E et F sont deux espaces de Hilbert il y à équivalence)

Corollaire 2 *Si $T \in L(E,F)$ est limite en norm e d'une suite d'opérateur de rang fini alors T est compact.*

Proposition 19

Propriété spectrale d'un opérateur compact

Théorème 32 *Soit E un espace de Banach, $T \in K(E)$ alors :*

1. $\ker(Id_E - T)$ *est de dimension finie*
2. $\Im(Id_E - T)$ *est fermé*
3. *Si $(Id_E - T)$ est injectif, alors $(I_E - T)$ est inversible.*

Preuve 12 *Preuve [1] 1)$\ker(Id_E - T)$ est le noyau de l'opérateur continu $Id_E - T$ est un e.v.n fermé donc espace de Banach (montrons qu'il est locaement compact ,c'est à dire : séparé (évident) et tout point $x \in \ker(Id_E - T)$ admet un voisinage compact. Soit B_x la boule unité fermé de centre x de l'espace de Banach $\ker(Id_E - T)$ B_x est fermé dans E et $B_x = T(B_x) \Rightarrow B_x = \overline{B_x} \subseteq \overline{T(B_x}$ est compact (car T est compact. Donc $\ker(Id_E - T)$ est de dimension finie (théorème de Riez) (tout e.v.n localement compat est de dimension finie).*
2) $\ker(Id_E - T)$ est fermé. Soit F un s.e.v fermé telque $E = \ker(Id_E - T) \oplus F$ (c'est possible $x = x + Tx - Tx$), $T_1 = (Id_E - T)|_F$ est injectif sur F d'aprés la proposition 11 T_1 est inversible et $\Im T_1 = \Im Id_E - T$ fermé. 3) Si $(Id_E - T)$ est injectif et $\Im(Id_E - T)$ est fermé il resté à montrer que $\overline{\Im(Id_E - T)} = E$,soit $S : \Im(Id_E - T) \to E$ soit $y \in E \Rightarrow \exists (y_n)_n \in \Im(Id_E - T)$et $\lim_{n\to\infty} y_n = y \Rightarrow \exists (x_n)_n \in E$, $y_n = x_n - T(x_n)$ la suite $(y_n)_n$ est de cauchy dans E car elle est convergente dans un espace de Banach montrons que $(x_n)_n$ est de Cauchy ($\|x_n - x_m\| \leq c^{-1} \| \underbrace{(Id_E - T)(x_n - x_m)}_{(y_n - y_m)} \| \leq \epsilon$ (proposition 11) donc convergente dans E vers $x \in E$

Théorème 33 *Soit E un espace de Banach de dimension infinie et $T \in K(E,F)$ alors :*

1. $0 \in \sigma(T)$
2. *Toute valeur spectrale* λ *non nulle est une valeur propre(* $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$*) et le sous espace propre* $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id_E)$ *est de dimension finie*
3. $\sigma(T)$ *est dénombrable et s'il est infini, on peut indexer les éléments de* $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *en une suite* $(\lambda)_{n\geq 1}$*qui tend vers* 0

Preuve 13 *Preuve [1]*

Théorème 34 *Soit* T *un opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert séparable* H *non nul. Alors Il existe une base orthonormée* $(e_n)_n$ *de* H *formée de vecteurs propres de* T *et l'on a pour tout* $x \in H$

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

où λ_n *est la valeur propre associée à* e_n

Preuve 14 *Preuve [1] -*$\sigma(T) \neq \emptyset$ *(* T *est borné) il est dénombrable et toute valeur spectrale* λ *est une valeur propre(* $\sigma(T) = 0 \cup \sigma_p(T)$*) et le sous espace propre* $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id_E)$ *est de dimension finie (Théorème* 32*) les valeurs propres de* T *sont rélles et les sous espaces propres sont othogonaux deux à deux (* T*est auto-adjoint), soit une base* B_λ *de* E_λ *posons* $B = \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T)} B_\lambda$ *est un système orthonormé, il reste à montrer que* $\overline{[B]} = H$ *supposons le contraire de cela (c'est à dire* $\overline{[B]} \neq H \Leftrightarrow \overline{[B]}^{\perp} \neq 0 \Leftrightarrow B^{\perp} \neq 0$ *et* $T|_{[B]^{\perp}}$ *est compact (car si on prend un ensemble borné dans* $[B]^{\perp}$ *il est borné dans* H *alors* $T(M)$ *est précompact) alors* $T|_{[B]^{\perp}}$ *admet au moins une valeur propre et cette valeur propre est une valeur propre de* T *ces vecteurs propres sont dans* $[B]$ *et* $[B]^{\perp}$ *impossible.Donc* $\overline{[B]} = H$
L'opérateur $Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ *car* $\|Ux\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|T\|^2 \|x\|^2$ *(car* $|\lambda_n| \leq \|T\|$*) et* $U(e_n) = \lambda_n e_n = Te_n \, \forall n \geq 1$ *. On a* $U = T$

Chapitre 3

Théorie spetrale des opérateurs non bornés

Introduction

La majorité des opérateurs définis sur un espace de Hilbert H rencontrés dans la physique mathématiques ne sont pas bornés (Exemple les opérateurs différentiels sur $H = L^2([a, b]$ ne sont pas bornés. dés lors es mathématiques modernes s'intéressent à analyser les opérateurs linéaires $T : D(T) \to H$ où $D(T)$ est un s.e.v de H (muni de la topologie induite), ces opérateurs ne sont pas bornés , exemple l'opérateur $T\varphi = \varphi'$ partiellement définis sur un espace de Hilbert ($D(T) \subseteq H$)et non bornés. Les études sur les opérateurs non bornés restent toujours imcompletes et souvent difficiles mêmes dans les espaces de Hilbert.

3.1 Opérateurs non bornés

Définition 35 *Soient E, F deux espaces de B anach.Soit$D \subset E$ un s.e.v de E . Un opérateur linéaire $T : D \to F$ est appelé opérateur non borné. D est le domaine de définition de T noté $D(T)$ ($D(T)$ est un s.e.v de E). Un tel opérateur est entièrement décris par par son graphe*

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx),\ x \in D(T)\}$$

. De manière analogue un opérateur linéaire peut être considéré comme un s.e.v Γ *de $E \times F$ (muni de la topologie induite de $E \times F$*

Définition 36 **i)** *T est à domaine dense si $D(T)$ est dense E ($\overline{D(T)} = E$)*

ii) *Si S est un autre opérateur de $D(S) \to F$,S est une extension de T si $G(T) \subset G(S)$ et on écrit $T \subset S.i.e$ $D(T) \subset D(S)$, $Sx = Tx$, $x \in D(T)$*

iii) *On définit l'opérateur $S+T : D(S+T) \to F$ avec $(S+T)(x) = S(x)+T(x)$ de domaine $D(T) \bigcap D(S)$*

iv) *On définit l'opérateur ST : $D(ST) \to F$ avec $(ST)(x) = S(T(x))$ et $D(ST) = \{x \in D(T) : T(x) \in D(S)\}$*

Exemple 12 *1. L'opérateur $T : D(T) \to H$ défini par $T(x) = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$; où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $H = l^2(\mathbb{K}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, x_n \in \mathbb{K};\, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ et $D(T) = \{x \in l^2(\mathbb{K})\,;\, \sum_{n=0}^{\infty} n^2|x_n|^2 < \infty\}$ est non borné*

2. L'opérateur $S : D(S) \to H$ défini par $S(f) = if'$ où $D(S) = f \in H; f' \in H$ et $H = L^2([0, 1], \mathbb{C}$ où $D(S) = \{f \in H; f' \in H\}$ est un opérateur non borné

3.1.1 Opérateur fermé

Définition 37 *1. T est dit fermé si son graphe $\Gamma(T)$ est fermé*

2. T est dit fermable s'il admet une extension S fermé ($T \subset S$)

Proposition 20 *Un opérateur $(T, D(T))$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(T)$ telle que $\lim_n x_n = x$ et $\lim_n Tx_n = y$ on a alors $x \in D(T)$ et $y = Tx$.*

Preuve 15 *($\Rightarrow$) Supposons que T est fermé alors $\Gamma(T) = \overline{\Gamma(T)}$; soit $(x_n)_n \subset D(T)$ qui converge vers x , $(T(x_n))_n$ converge vers y , $(x_n, T(x_n))_n \in \Gamma(T)$ fermé alors $\lim_{n\to\infty}(x_n, T(x_n))_n \in \Gamma(T) \Rightarrow (x, y) \in \Gamma(T)$ (car $\Gamma(T)$ est fermé) . alors $x \in \Gamma(T)$ et $y = Tx$.*
($\Leftarrow$) Soit $(x, y) \in \overline{\Gamma(T)} \Rightarrow \exists((x_n), T(x_n))_n \in \Gamma(T), |\lim_{n\to\infty}(x_n) = x, \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$ alors $x \in D(T)$ et $y = Tx$ alors $\Gamma(T)$ est fermé.

Corollaire 3 *Soit T un opérateur fermé. Alors T est borné si et seulement si $D(T) = E$.*

Proposition 21 *T est fermable si et seulement si $\overline{\Gamma(T)}$ est le graphe d'un opérateur . On a alors $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\widehat{T})$, où $\widehat{T}$ est la plus petite extension fermé de T, appelée la fermeture de T*

Proposition 22 *Un opérateur T et fermable si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(T)$ qui converge vers $0 \in E$ et telle ue $(T(x_n))_n$ converge vers y dans F alors $y = 0$*

Exemple 13 *$E = C([0,1])$ muni de la norme de convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ et T défini sur $D = C^1([0,1])$ par $T(f) = f'$ est fermé à domaine dense (voir Exercice 1 Td 4)*

Exemple 14 *On considére $H = L^2([0;1])$ et $D(A) = C([0;1]) \subset H$. posons $T : D(T) \to H$ et $Tx(t) = x(0)$. T est de domaine dense (car l'ensemble des fonctions continue à support compacte contenue dans [0,1] (donc continue sur $[0,1]$ est dense dans $L^2([0;1])$ non fermable (appliquons la proposition 22. En effet, si l'on considère $(x_n)_n$ une suite dans $D(T)$ définie par $x_n(t) = (1-t)^n$, on a : $\|x_n\|_{L^2([0;1])} = (\int_0^1 (1-t)^{2n} dt)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \to 0$ et $T(x_n(0) = x_n(0) = 1$*

Mais $(Tx_n) = 1$ qui montre que T est non fermable.

Exemple 15 *On considère $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ défini par $T(f) = f'$ de domaine $D_1(T) = \{f \in C^1(\mathbb{R})$ à support compact$\}$ T n'est pas fermé montrons que T est fermable et calculons sa fermeture.*
$\Gamma(T) = \{(f, f')|f \in C^1(\mathbb{R})$support compact $\}$. Soit $(f, f') \in \overline{\Gamma(T)}$ implique $\exists (f_n)_n \subset C^1(\mathbb{R})$support compact tel que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $f_n \to g$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (d'aprés un théorème sur la théorie de mesure $\exists (f_{n_k})$ une sous suite de $(f_n)_n$ telque $f_{n_k} \to f$ presque partout sur $\mathbb{R}$ (on peut supposer que c'est la suite $(f_n)_n$ car on a il existe une suite). soit $a \in \mathbb{R}$ $((f_n)(a) \to f(a)$ et $(f_n)(t) = (f_n)(a) + \int_a^t f_n'(s)ds$ et on a la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$ donc on a la convergence sur toutes les parties bornées de $\mathbb{R}$ ce qui implique $f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds$ implique que f est continue localement et il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\forall t < u$ $f(u) = f(t) + \int_t^u g(s)ds$ donc $\overline{\Gamma(T)} = \{(f,g) \in (L^2(\mathbb{R}))^2 | \forall t < u \ f(u) = f(t) + \int_t^u g(s)ds\} = H^1(\mathbb{R})$ Si $(0, g) \in H^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_t^u g(s)ds \, \forall t < u \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} 1_{[t,u]}(s)g(s)ds = 0 \forall t < u$ implique que g est orthogonale à toute les fonctions en esaliers dans (espaces des fonctions en escaliers dans $\mathbb{R}$) qui est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et $g = 0$ et T est fermable sa fermeture et $S : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ définie par $S(f) = f'$ et de domaine $H^1(\mathbb{R})$

3.1.2 Opérateur inverse

Définition 38 *Un opérateur $T : E \to F$ de domaine $D(T)$ est inversible si l'application $T : D(T) \to F$ est inversible*

Proposition 23 *L'inverse d'un opérateur injectif fermé est fermé (l'opérateur $T : D(T) \to F$ est dit injectif si l'application T est injectif.*

Preuve 16 *Si T est injective et fermé alors l'application $T : D(T) \to F$ est injective et son graphe $\Gamma(T) = \{(x, Tx), \ x \in D(T)\}$ est fermé. Si $T : D(T) \to F$ est inversible alors $\Gamma(T^{-1}) = \Lambda(\Gamma(T)$ où l'application Λ : est l'homéomorphisme (bijection bicontinue) de $E \times F \to F \times E$ définie par $\Lambda(x, y) = (y, x)$ d'où $\Gamma(T^{-1})$ est fermé donc T^{-1} est fermé*

Corollaire 4 *Si $T \in L(E,F)$ (borné) est inversible alors T^{-1} est fermé*

Proposition 24 — *a)Soient $S : E \to F$ une application linéaire continue et $T : F \to G$ un opérateur fermé (respectivement fermable) ; l'opérateur TS est fermé (respectivement fermable).*
— *b)Soient $S : E \to F$un opérateur fermé (respectivement fermable) et $T : G \to F$ une application linéaire continue injective alors $T^{-1}S$ est fermé (respectivement fermable)*

3.2 Opérateur adjoint

Définition 39 *Soit $T : H \to H$ (H est un espace de Hilbert) un opérateur à domaine dense ($\overline{D(T)} = H$) l'adjoint de T est l'unique opérateur $T^\star$ ayant pour domaine $D(T^\star) = \{y \in H | \exists c \geq 0 \, telque |\langle Tx, y\rangle| \leq c\|x\|, \forall x \in D(T)\}$. Ansi $\forall y \in D(T^\star)$, $T^\star(y)$ est l'unique élément de H vérifiant : $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle$ pour tout $x \in D(T)$.*
On dit que T est symétrique si $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pour toutx, $y \in D(T)$. Cela revient à dire que $T \subset T^\star$.
Un opérateur T de H dans lui même est autoadjoint si $T = T^\star$. Tout opérateur autoadjoint est symétrique mais la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 16 *Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, $D = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx < \infty\}$ et l'opérateur $T : D(T) \to H$ défini par $T(f)(x) = xf(x)$ p.p sur D est dense dans H (il contient toutes les fonctions continues à support compact $\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2dx = \int_{supp\ f} x^2|f(x)|^2dx$ et on a $C_{supp} \subset D \Rightarrow L^2(\mathbb{R}) = \overline{C_{supp}} \subset \overline{D}$ d'où $\overline{D} = L^2(\mathbb{R})$ Soit $g \in D(T^\star)$ et soit $f \in D(T) \Rightarrow \exists c > 0 | |\langle Tf, g\rangle| \leq c\|f\|$ on a alors $|\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)g(x)dx| \leq c(\int_{\mathbb{R}} f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ On choisit $f(x) = x1_{[-n,n]}(x)g(x) \Rightarrow |\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)g(x)dx| = |\int_{-n}^{n} x^2|g(x)|^2dx| \leq c(\int_{\mathbb{R}} f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} =\leq c(\int_{-n}^{n} x^2|g(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}$ donc $|\int_{-n}^{n} x^2|g(x)|^2dx \leq c^2 \leq \infty$ et $g \in D(T) = D$ et $\langle Tf, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} xf(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} xg(x)f(x)dx \, \forall f \in D(T)$ donc $T^\star = T$*

Proposition 25 *Soit T un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans un espace de Hilbert H.Alors :*

$$\Im(T)^\perp = \ker(T^\star)$$

Proposition 26 *Soient H et K deux espaces de Hilbert et T un opérateur défini par densité, fermé de H et K.*

1. *$(S+T)^\star = S^\star + T^\star$, $\forall S \in L(H,K)$ (borné)*
2. *Si R est une extension de T, alors $R^\star \subset T^\star$.*
3. *Si T est injectif et d'image dense, alors $(T^{-1})^\star = (T^\star)^{-1}$*

3.3 Spectre des opérateurs fermés

Définition 40 *Soit T un opérteur fermée dans un espace de Hilbert H. l'ensemble résolvant de T noté $\varrho(T)$ est l'ensemble des nombres complexes $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que l'opérateur : $T_\lambda = T - \lambda I_H : D(T) \to H$ est bijectif de plus son inverse est continue : $\varrho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | T_\lambda \text{ bijetive et} T_\lambda^{-1} = R_\lambda(T) \text{soit continue}\}$*
Le spectre de T est l'ensemble $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \varrho(T)$

Remarque 5
1. *Pour $\lambda \in \varrho(T)$ l'opérateur bornée $R_\lambda(T) = (T - \lambda I_H)^{-1}$ est appelé le résolvant de T en λ*
2. *le spectre d'un opérateur fermé est la réunion disjointe $\sigma(T) = \sigma_p(T) \bigcup \sigma_c(T) \bigcup \sigma_r(T)$*
3. *Seuls les opérateurs fermées sont intéréssants pour la théorie spetrale (en effet si T n'est ps fermée alors si λ est valeur régulière de T c'est à dire ($\lambda \in \varrho(T)$) alors $\exists(T - \lambda I_H)^{-1}$ borné et d'aprés la proposition 3 $(T - \lambda I_H)^{-1}$ est fermé $\Rightarrow T - \lambda I_H$ fermé et T est fermé absurde alors $\varrho(T) = \emptyset$*

Définition 41 *Si $\lambda \in \varrho(T)$ est telque $T_\lambda = T - \lambda I_H$ n'est pas injectif ($\ker T_\lambda \neq \{0\}$) dans ce cas λ est une valeur propre ($(T - \lambda I_H)x = 0 \Leftrightarrow Tx = \lambda x | x \neq 0$), $x \neq 0$ est le vecteur propre corresondant à la valeur propre λ,l'ensemble des valeurs propres est noté $\sigma_p(T)$: (spectre ponctuel de T).*
On appelle spectre résiduel de T :($\sigma_r(T)$) l'ensemble des valeurs λ telque $\lambda \in \sigma(T)$ n'appartient pas à $\sigma_p(T)$ et $\Im(T - \lambda I_H)$ n'est pas dense dans H.
On appelle spectre continue de T :($\sigma_c(T)$) l'ensemble des valeurs λ telque $\lambda \in \sigma(T)$ n'appartient pas à $\sigma_p(T) \bigcup \in \sigma_r(T)$

Remarque 6 *Pour $\lambda \in \sigma_c(T)$, l'opérateur $T - \lambda I_H$ est d'image dense, mais $(T - \lambda I_H)^{-1}$ n'est pas continu.*

Proposition 27 *Soit T un opérateur fermé dans un espace de Banach complexe E dans lui même est une partie fermée de $\mathbb{C}$ et l'application $R_\lambda : \lambda \to R_\lambda(T)$ est continue et holomorphe sur $\varrho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$ dans $L(E)$.*
On à $\forall \lambda, \mu \in \varrho(T)$ $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu) R_\lambda(T) R_\mu(T)$

Preuve 17

Proposition 28 *Soient T un opérteur injectif fermé d'un espace de Banach E dans lui même et $\lambda \in \varrho(T)$ non nulle alors $\lambda^{-1} \in \varrho(T^{-1})$ et on a $R_{\lambda^{-1}}(T^{-1}) = -\lambda T R_\lambda(T) = -\lambda Id_E - \lambda^2 R_\lambda(T)$*

Preuve 18 *L'opérateur $T^{-1} : D(T^{-1}) = \Im T \to E$ est fermé d'aprés la proposition 23 pour $x \in D(T^{-1}) = \Im T$ on veut résoudre l'équation spectrale $*(T^{-1} - \lambda^{-1} Id_E)(x) = y \forall y \in E$. Puisque $\lambda \in \varrho(T)$ on peut écrire $y = (T - \lambda Id_E)(z)$*

avec $z = R_\lambda(T)y$*.On sait que* $D(T) = \Im(T^{-1})$*, donc Il existe* $u \in \Im(T)$ *telque* $z = T^{-1}u$*. L'équation spectrale* $*$ *est donc :* $T^{-1}x - \lambda^{-1}x = (T - \lambda Id_E)(T^{-1}u) = u - \lambda T^{-1}u = T^{-1}(-\lambda u) - \lambda^{-1}(-\lambda u)$*. une solution serait* $x_0 = -\lambda u$ *et l'opérateur* $T^{-1} - \lambda^{-1}Id_E$ *est injectif alors la solution* $x_0 = -\lambda u$ *est unique. donc* $R_\lambda(T^{-1})((x)$ *existe et unique, on a donc* $x = R_{\lambda^{-1}}(T^{-1})(y) = -\lambda u = -\lambda T(z) = -\lambda T(z) = -\lambda T R_\lambda(T)(y)$*. et si* $x \in D(T) = \Im T$ *et* $T^{-1}(x) - \lambda^{-1}x = 0$*, alors* $x = \lambda T^{-1}(x) \in D(T)$ *et* $T(x) = \lambda x$ *implique que* $x = 0$ *puisque* λ *est réguliere pour* T*. alors L'opérateur* $TR_\lambda(T)$ *est borné sur* E *car* $TR_\lambda(T) = \lambda R_\lambda(T) + Id_E$*.*

3.3.1 Spectre des opérateurs autoadjoints

Théorème 42 *Soit* H *un espace de Hilbert complexe et* T *un opérateur fermé sur* H *et autoadjoint alors le spectre de* T *est réel c'est à dire* $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$*.*

Bibliographie

[1] D.Lie *Cours d'analyse foncctionnelle ave 200 Exercices corrigés*, Ellipses 2013.

[2] K. Ammari et H.Skhiri *Elements d'analyse fonctionnelle : cours et exercices acvec solutions* , Centre de Publication Universitaire,2011.

[3] B. Bendoukha, (*THEORIE SPECTRALE DES OPERRATEURS DANS LES ESPACES DE HILBERT.*) Site internet